

Application of AUSM Family Schemes to Study the Shock-Waves Interaction near the Surface of High-Speed Aircraft

D. V. Ishin^{1,2}

¹JSC "Tactical Missile Corporation", Korolev, Moscow region, 141080, Russian

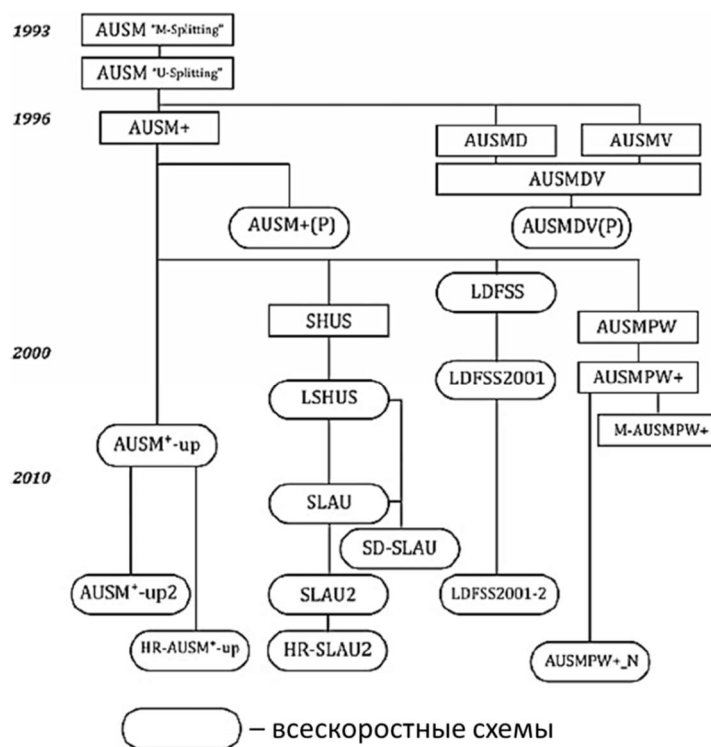
²Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, 119526, Russian

ishin.d.v@mail.ru

Abstract

The main advantages and disadvantages of using unstructured computational grids was discussed. Various methods for solving the Riemann problem of the decay of an arbitrary discontinuity at cell boundaries are considered in the study of shock-wave interactions near the surface of high-speed aircraft. The concept of the AUSM approach and the main relationships of the algorithm are presented. The main modifications of the AUSM scheme are presented, along with their features, differences, advantages, and disadvantages.

Keywords: Riemann problem, contact discontinuity, shock-wave interaction, AUSM scheme, high-speed aerothermodynamics.



Chronology of the creation and development of the main modifications of the AUSM scheme and their interrelationship [72]

УДК 533.6.011

Применение схем семейства алгоритмов AUSM при исследовании ударно-волновых взаимодействий вблизи поверхности высокоскоростных летательных аппаратов

Д. В. Ишин^{1,2}

¹АО «Корпорация «Тактическое ракетное вооружение»»,
Россия, г. Королёв, Московская область, 141080, ул. Ильича, 7

²Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН,
Россия, г. Москва, 119526, проспект Вернадского, д.101, корп.1

ishin.d.v@mail.ru

Аннотация

Приведены основные достоинства и недостатки применения неструктурированных расчетных сеток. Рассмотрены различные методы решения задачи Римана о распаде произвольного разрыва на границах ячеек при исследовании ударно-волновых взаимодействий вблизи поверхности высокоскоростных летательных аппаратов. Представлены замысел подхода AUSM и основные соотношения алгоритма. Приведены основные модификации схемы AUSM, а также их особенности, различия, достоинства и недостатки.

Ключевые слова: задача Римана, контактный разрыв, ударно-волновое взаимодействие, схема AUSM, высокоскоростная аэротермодинамика.

1. Введение

Исследование ударно-волновых взаимодействий является важным этапом проектирования высокоскоростных летательных аппаратов (ВЛА). Характерными особенностями таких течений являются наличие сильных скачков уплотнения, контактных разрывов, волн разрежения, а также сложных структур пограничного слоя и отрывных зон. На рис. 1 показаны различные типы интерференционных картин, возникающих при пересечении скачков уплотнения.

Численное моделирование обтекания тел произвольной геометрии высокоскоростным потоком газа связано с такими сложностями, как высокая трудоемкость, повышенные требования к квалификации специалиста, длительность процесса сходимости решения. В то же время при использовании различных методов интегрирования уравнений аэротермодинамики особую важность имеют вопросы правильности выбора расчетной области и контроля качества сетки.

В механике сплошной среды широкое распространение получили как структурированные, так и неструктурированные расчетные сетки. Достоинства и недостатки структурированных сеток хорошо изучены как отечественными [3–7], так и зарубежными авторами [8–11]. В отношении неструктурированных сеток можно выделить следующие положительные свойства:

- 1) гибкость для сложной геометрии [6, 12, 13] – эффективное описание областей со сложной геометрией, где построение структурированной сетки было бы крайне трудоёмким или невозможным;
- 2) локальная адаптация [14, 15] – возможность сгущения сетки в критических зонах (например, вблизи ударных волн, в пограничном слое, в местах резких изменений кривизны

- поверхности), не перегружая всю расчётную область лишними ячейками, что позволяет оптимизировать вычислительные ресурсы и повысить точность в интересующих областях;
- 3) автоматизация построения [6, 12, 16] – использование современных алгоритмов позволяет сильно автоматизировать процесс построения сетки для сложных областей;
 - 4) удобство для параллельных вычислений [17-19] – возможность упрощенной балансировки нагрузки между процессорами в параллельных расчётах в связи с отсутствием жёсткой привязки к блочной структуре;
 - 5) возможность использования гибридных подходов [17, 20] – применение в сложных зонах неструктурированных элементов, а в более регулярных областях структурированных блоков или призматических слоев позволяет повысить точность без избыточных вычислений.

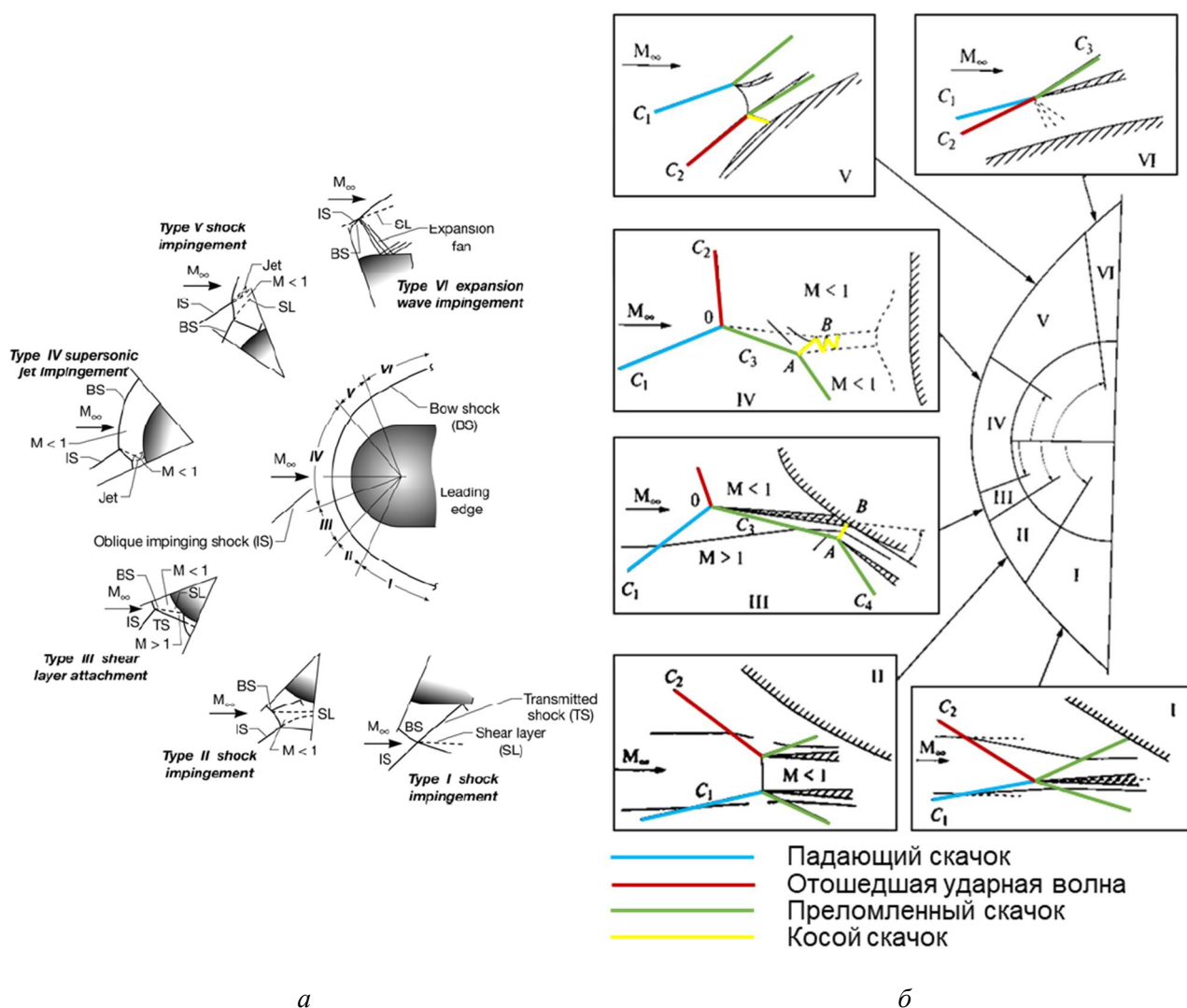


Рис. 1. Типы интерференционных картин ударных волн и их расположение в окрестности цилиндрической поверхности: а) схема из работы [1]; б) схема из работы [2]

В то же время неструктурированные сетки имеют и недостатки:

- 1) сложность численных алгоритмов [21-23] – необходимость хранения дополнительной информации, что увеличивает объём используемой памяти, при этом сами численные схемы часто сложнее в реализации и могут быть менее устойчивыми;
- 2) проблемы с разрешением ударных волн [19, 24-27] – необходимость сгущения сетки или применения гибридных схем в зонах ударно-волновых взаимодействий;

- 3) сложности с тонкими пограничными слоями [21, 23, 27, 28] – неоптимальность ячеистого представления при наличии тонких вязких слоев у поверхности для качественного определения параметров конвективного теплообмена;
- 4) проблемы при перестройке сетки [29, 30] – при необходимости перестроения сетки в ходе расчета на каждой итерации или шаге процесс вычислений сильно замедляется;
- 5) риск ухудшения качества элементов [31] – возможность генерации сильно вытянутых или искаженных ячеек при автоматическом построении сетки, что снижает точность расчетов.

Таким образом, недостатки неструктурированных расчетных сеток сводятся к необходимости применения алгоритмов повышенной точности при написании расчетных кодов, а также к потребности в высоких ресурсных, вычислительных и временных затратах в процессе численного моделирования.

Тем не менее, современное развитие высокопроизводительных вычислительных средств и применение алгоритмов параллельных вычислений позволяет нивелировать перечисленные недостатки неструктурированных расчетных сеток, в полной мере раскрывая все преимущества.

Для дискретизации уравнений Навье – Стокса на неструктурированных сетках наиболее часто применяется метод конечного объема [32–35]. В соответствии с работой [36], точное решение задачи Римана о распаде произвольного разрыва на границах ячеек по классической схеме С.К. Годунова [37] является крайне трудоемкой итерационной процедурой, в связи с чем были созданы методы ее приближенного решения, которые являются достаточно эффективными для неструктурированных сеток.

В работе [38] рассмотрены приближенные методы решения задачи Римана о распаде произвольного разрыва для численного моделирования высокоскоростных течений, основанные на расщеплении разности вектора потока и вектора потока, а также представлен анализ их эффективности:

- 1) двухволновой метод HLL [39], рассматривающий левую и правую ударную волны без учета контактного разрыва;
- 2) схема HLLC [40, 41], являющаяся развитием метода HLL и учитывающая контактный разрыв;
- 3) метод Русанова [42], использующий подход, аналогичный HLL;
- 4) метод Roe [43], использующий особую линеаризацию исходной системы уравнений;
- 5) схема Ошера [44–46], использующая только простые волны для поиска приближенного решения;
- 6) схема Стегера – Уорминга [47], основанная на свойствах уравнений газовой динамики, а именно на свойстве однородности вектора конвективного потока;
- 7) схема ван Лира [48, 49], также использующая свойства уравнений газовой динамики и накладывающая ограничения на расщепленные матрицы Якоби и векторы потока;
- 8) схема Лео – Стефана [50], основанная на расщеплении вектора потока на акустическую и конвективную составляющие.

Анализ эффективности численных схем, выполненный в работе [39] на примере решения модифицированной задачи Сода, показал: методы, основанные на расщеплении вектора потока проще в реализации по сравнению с методами типа Годунова, что делает их более эффективными и менее затратными с вычислительной точки зрения, однако уступают по точности последним.

Применение схем семейства алгоритмов AUSM (Advection Upstream Splitting Method) в современной вычислительной аэротермодинамике является широко распространенной методикой для расчета потока на грани. Особенности применения схемы AUSM для расчета высокоскоростных течений газа на неструктурированных сетках посвящена работа [32], где также продемонстрирована возможность ускорения вычислений до 2,5 раз по сравнению с вычислениями по схеме С.К. Годунова.

2. Замысел подхода AUSM

Впервые данный алгоритм был представлен исследователями Лео и Стефаном в работе [50] для решения типовых задач аэродинамики. Позднее он был усовершенствован [51–53] и обобщен для использования при любых скоростях набегающего потока и многофазных течениях [54–59].

Особенность построения схем семейства алгоритмов AUSM заключается в расщеплении по физическим процессам по числу Маха (конвективный поток) и давлению (акустический поток) отдельно

$$F = F_{\rho V} + F_p, \quad (1)$$

где $F_{\rho V} = \dot{m}(1 \ u \ v \ w \ H)^T$ – конвективный поток; $\dot{m}$ – поток массы; F_p – акустический поток.

В различных случаях одно из слагаемых может играть ключевую роль: например, вблизи стенки в пограничном слое большее влияние оказывает конвективный поток, а в области разрыва – акустический.

Если в соответствии с работой [5] систему дифференциальных уравнений Навье – Стокса, дополненную уравнениями неразрывности, полной энергии и теплопроводности для ламинарного течения представить в векторно-матричном виде

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(F_{\rho V}^x + F_p^x - T_\tau^x) + \frac{\partial}{\partial y}(F_{\rho V}^y + F_p^y - T_\tau^y) + \frac{\partial}{\partial z}(F_{\rho V}^z + F_p^z - T_\tau^z) = R, \quad (2)$$

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho[e + 0,5(u^2 + v^2 + w^2)] \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho f_x \\ \rho f_y \\ \rho f_z \\ Q_\Sigma \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$F_{\rho V}^x = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 \\ \rho uv \\ \rho uw \\ \rho uE \end{pmatrix}, \quad F_{\rho V}^y = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ \rho v^2 \\ \rho vw \\ \rho vE \end{pmatrix}, \quad F_{\rho V}^z = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho wu \\ \rho wv \\ \rho w^2 \\ \rho wE \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$$F_p^x = \begin{pmatrix} 0 \\ p \\ 0 \\ 0 \\ \rho u + q_x \end{pmatrix}, \quad F_p^y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \\ 0 \\ \rho v + q_y \end{pmatrix}, \quad F_p^z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ p \\ \rho w + q_z \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$T_\tau^x = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} \end{pmatrix}, \quad T_\tau^y = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yz} \\ u\tau_{xy} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} \end{pmatrix}, \quad T_\tau^z = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zz} \\ u\tau_{xz} + v\tau_{yz} + w\tau_{zz} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где u, v, w – проекции вектора скорости $\vec{V}$ на координатные оси x, y, z ; ρ – плотность; p – давление; $E = \rho(e + V^2/2)$ – полная внутренняя энергия единицы объема; e – удельная внутренняя энергия; f_x, f_y, f_z – массовые объемные силы; q_x, q_y, q_z – проекции вектора плотности теплового потока $\vec{q}$ на координатные оси; Q_Σ – объемные источники тепловыделения; τ_{ij} – компоненты тензора вязких напряжений, то, в соответствии с подходом AUSM уравнения (4) и (5) можно представить в следующем виде:

$$F_{\rho V} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho ui \\ \rho uv \\ \rho uw \\ \rho Eu + pu \end{pmatrix} = \mathbf{u} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E + p \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \rho c \\ \rho uc \\ \rho vc \\ \rho wc \\ (\rho E + p)c \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$F_p = p \begin{pmatrix} 0 \\ n^x \\ n^y \\ n^z \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где $\mathbf{u} = un^x + vn^y + wn^z$.

Пусть индекс «L» соответствует текущей ячейке, индекс «R» – соседней, а «1/2» – границе между ними (рис. 2). Тогда можно выявить соотношение

$$F_{\rho V}^{1/2} = M_{1/2} \begin{pmatrix} \rho c \\ \rho uc \\ \rho vc \\ \rho wc \\ (\rho E + p)c \end{pmatrix}_{L/R} \quad (9)$$

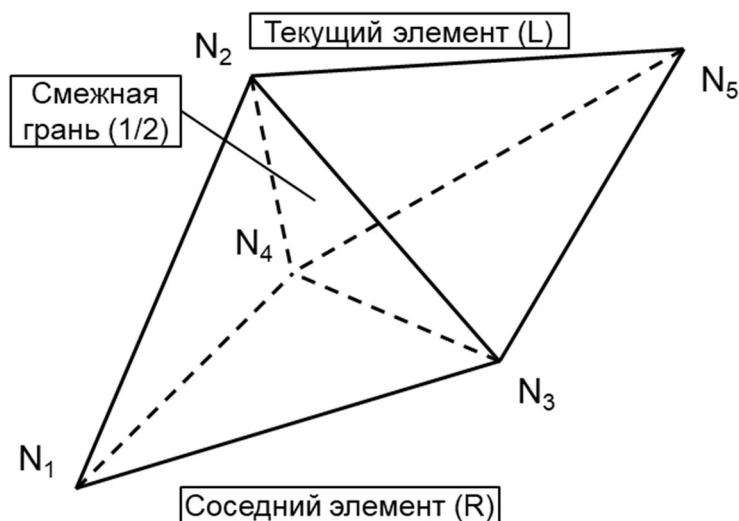


Рис. 2. Расположение соседних тетраэдральных элементов [60]

Замысел подхода AUSM состоит в расщеплении потоков за счет числа $M_{1/2}$, а пассивные величины переносятся из ячейки, из которой поток истекает

$$f_{L/R} = \begin{cases} f_L, & M_{1/2} > 0, \\ f_R, & M_{1/2} \leq 0 \end{cases} \quad (10)$$

Ключевой задачей является определение числа $M_{1/2}$, которое в схеме AUSM равно сумме вкладов слева (f_L^+) и справа (f_R^-)

$$M_{1/2} = f_L^+ + f_R^- \quad (11)$$

Для функции давления расщепление производится аналогично

$$p_{1/2} = \phi_L^+ p_L + \phi_R^- p_R \quad (12)$$

В работе [49] ван Лиром предложена аппроксимация функций f_L^+ и f_R^- с помощью полиномов второго порядка, а функций ϕ_L^+ и ϕ_R^- – третьего порядка

$$f_{L/R}^\pm = \begin{cases} \pm \frac{1}{4} (M_{L/R} \pm 1)^2, & |M_{L/R}| < 1, \\ \frac{1}{2} (M_{L/R} \pm |M_{L/R}|), & |M_{L/R}| \geq 1; \end{cases} \quad (13)$$

$$\phi_{L/R}^\pm = \begin{cases} \frac{1}{4} (M_{L/R} \pm 1)^2 (2 \mp M_{L/R}), & |M_{L/R}| < 1, \\ \frac{1}{2} (1 \pm \text{sign}(M_{L/R})), & |M_{L/R}| \geq 1 \end{cases} \quad (14)$$

В работе [50] с целью устранения колебаний на фронте ударной волны аппроксимации вышеуказанных функций предлагаются в виде полиномов четвертого и пятого порядка соответственно:

$$f_{L/R}^\pm = \begin{cases} \pm \frac{1}{4} (M_{L/R} \pm 1)^2 \pm \frac{1}{8} (M_{L/R}^2 - 1)^2, & |M_{L/R}| < 1, \\ \frac{1}{2} (M_{L/R} \pm |M_{L/R}|), & |M_{L/R}| \geq 1; \end{cases} \quad (15)$$

$$\phi_{L/R}^\pm = \begin{cases} \frac{1}{4} (M_{L/R} \pm 1)^2 (2 \mp M_{L/R}) \pm \frac{3}{16} M_{L/R} (M_{L/R}^2 - 1), & |M_{L/R}| < 1, \\ \frac{1}{2} (1 \pm \text{sign}(M_{L/R})), & |M_{L/R}| \geq 1 \end{cases} \quad (16)$$

3. Модификации схемы AUSM

В семействе алгоритмов AUSM существует множество различных схем, обладающих своими достоинствами и недостатками (например, эффект «карбункула» [61]). В ретроспективной работе [62] представлены результаты первого десятилетия развития схем AUSM:

- 1) оригинальный алгоритм AUSM [50], подверженный влиянию численных неустойчивостей в областях сильных возмущений;
- 2) модификация AUSM⁺ [51], позволяющая избежать эффекта «карбункула», однако подверженная появлению численной неустойчивости в пристеночной области;
- 3) модификация AUSMD [63], устойчивая в пристеночной области, но подверженная появлению «карбункула»;

- 4) модификация AUSMDV [52], объединяющая схему расщепления вектора потока и метод приближенного решения задачи Римана;
- 5) модификация AUSM- ϕ_{triad} [64], позволяющая получить хорошее приближение для нестационарных потоков к результатам, полученным с использованием DNS-модели;
- 6) модификации AUSM⁺-a, AUSM⁺-u, AUSM⁺-au, AUSM⁺-ap, AUSM⁺-up [54] (где a, u, p – скорость звука, скорость потока и давление соответственно).

В последующие годы были созданы следующие схемы:

- 1) AUSMPW [55], AUSMPW+ [56];
- 2) SLAU (Simple Low-dissipation AUSM) [65];
- 3) SLAU2 [66, 67];
- 4) AUSM⁺-up2, LDFSS2001-2 [67-69];
- 5) AUSM+M [70];
- 6) ADAUSM [71];
- 7) AUPM [72].

На рис. 3 из работы [73] представлено развитие наиболее популярных модификаций схемы AUSM.

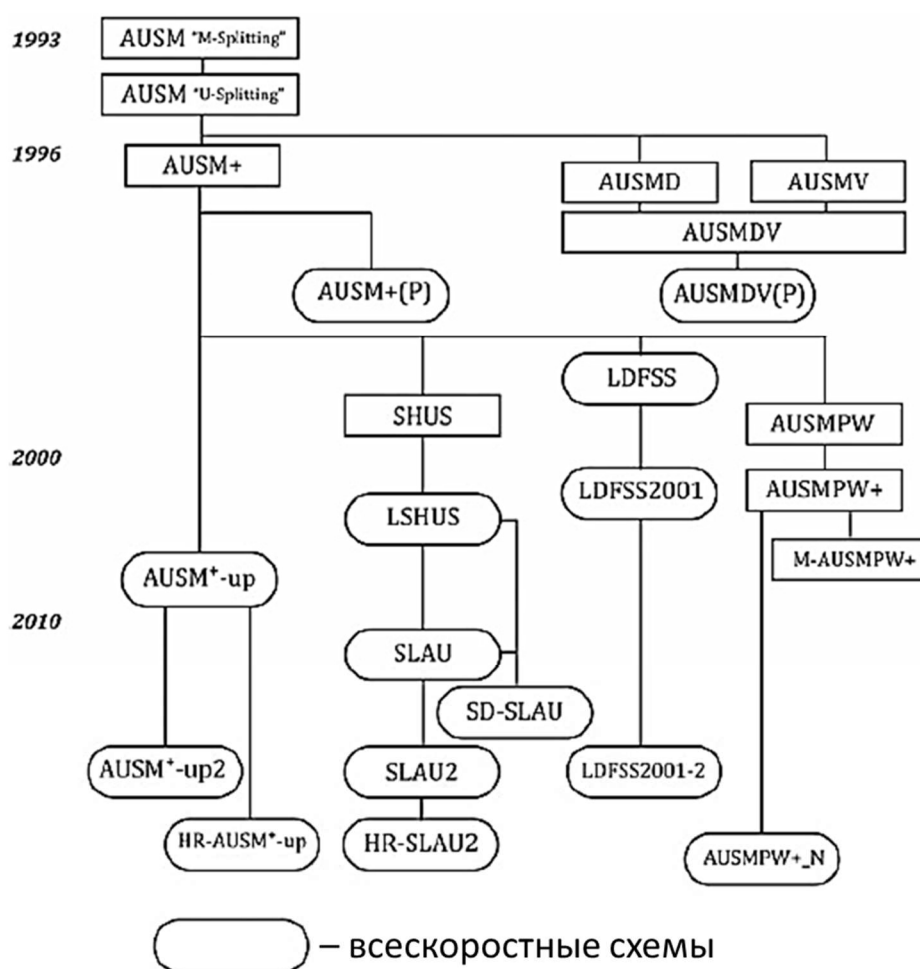


Рис. 3. Хронология создания и развития основных модификаций схемы AUSM и их взаимосвязь

Существует множество других модификаций исходной схемы AUSM, которые, однако, получили меньшее распространение. Далее рассмотрим основные соотношения наиболее популярных схем, которые нашли применение при решении задач высокоскоростной аэротермодинамики.

3.1. AUSM⁺

В схеме AUSM⁺ соотношение (9) принимает вид

$$F_{\rho V}^{1/2} = M_{1/2} c_{1/2} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E + p \end{pmatrix}_{L/R} \quad (17)$$

Для данной схемы справедливо соотношение (11) для определения числа $M_{1/2}$, однако вклад слева и справа определяется из соотношений:

$$f_{L/R}^{\pm} = \begin{cases} \pm \frac{1}{2} (M_{L/R} \pm 1)^2 \pm \beta (M_{L/R}^2 - 1)^2, & |M_{L/R}| < 1, \\ \frac{1}{2} (M_{L/R} \pm |M_{L/R}|), & |M_{L/R}| \geq 1, \end{cases} \quad (18)$$

где $-\frac{1}{16} \leq \beta \leq \frac{1}{2}$.

Расщепление давления производится по соотношению (12), для которого функции ϕ_L^+ и ϕ_R^- определяются с использованием формул

$$\phi_{L/R}^{\pm} = \begin{cases} \frac{1}{4} (M_{L/R} \pm 1)^2 (2 \mp M_{L/R}) \pm \alpha M (M^2 - 1)^2, & |M_{L/R}| < 1, \\ \frac{1}{2} (1 \pm \text{sign}(M_{L/R})), & |M_{L/R}| \geq 1, \end{cases} \quad (19)$$

где $-\frac{3}{4} \leq \alpha \leq \frac{3}{16}$.

Дополнительным шагом при реализации схемы AUSM⁺ является определение скорости звука на смежной грани, которое выполняется с использованием следующего соотношения:

$$c_{1/2} = \frac{c_L^{*2}}{u_L}, \quad (20)$$

где $c_L^* = \sqrt{\frac{2H_L(\gamma-1)}{(\gamma+1)}}$ – критическая скорость звука, $H_L = F_{\rho V, L}^{(5)}$.

3.2. AUSMPW

В схеме AUSMPW применяется соотношение

$$M_{1/2} = \tilde{f}_L^+ + \tilde{f}_R^-, \quad (21)$$

где $\tilde{f}_L^+$ и $\tilde{f}_R^-$ – интерполяционные функции, определяемые соотношениями

$$\text{при } M_{1/2} = f_L^+ + f_R^- \geq 0 \quad \begin{cases} \tilde{f}_L^+ = f_L^+ + f_R^- - f_R^- \omega(1 + F_R) + f_L^+ F_L + f_R^- F_R, \\ \tilde{f}_R^- = f_R^- \omega(1 + F_R), \end{cases} \quad (22)$$

$$\text{при } M_{1/2} < 0 \quad \begin{cases} \tilde{f}_L^+ = f_L^+ \omega (1 + F_L), \\ \tilde{f}_R^- = f_L^+ + f_R^- - f_L^+ \omega (1 + F_L) + f_L^+ F_L + f_R^- F_R, \end{cases} \quad (23)$$

где $F_{L/R}$ и ω – весовые функции от давления и числа Маха соответственно.

Для вычисления значений весовых функций F и ω применяются следующие соотношения:

$$F_{L/R} = \begin{cases} \pm P \left(\frac{p_{L/R}}{p_{1/2}} - 1 \right) \left(\frac{1}{2} (M_{L/R} + 1) \right)^2 \times \min \left(1, \left(\frac{V_{L/R}}{c} \right)^{0,25} \right), & |M_{L/R}| \leq 1, \\ 0, & |M_{L/R}| > 1, \end{cases} \quad (24)$$

$$\omega = 1 - \Pi^3,$$

где $V = \sqrt{(u)^2 + (v)^2 + (w)^2}$ – модуль вектора скорости; функция P определяется из соотношений

$$P = \begin{cases} 4\Pi - 3, & \frac{3}{4} \leq \Pi < 1, \\ 0, & 0 \leq \Pi < \frac{3}{4}, \end{cases}, \quad \Pi = \min \left(\frac{p_L}{p_R}, \frac{p_R}{p_L} \right) \quad (25)$$

Число Маха по обе стороны границы зависит от скорости звука и определяется из соотношений

$$M_{L/R} = \frac{u_{L/R}}{c_{1/2}}, \quad c_{1/2} = \min(\tilde{c}_L, \tilde{c}_R), \quad (26)$$

где $\tilde{c}_{L/R} = \frac{c^{*2}}{\max(|u_{L/R}|, c^*)}$, $u_{L/R}$ – нормальная к границе компонента скорости;

$c^* = \sqrt{\frac{2H(\gamma-1)}{(\gamma+1)}}$ – критическая скорость звука, $H = F_{\rho V}^{(5)}$.

Для функций f_L^+ , f_R^- и ϕ_L^+ , ϕ_R^- применяются аппроксимационные соотношения (18) и (19) соответственно.

Таким образом, в развитие идей схем AUSM и AUSM⁺ в схеме AUSMPW [55] за устойчивость в пристеночной области отвечает весовая функция от давления F , а для устранения неоднородности в областях сильных возмущений вводится весовая функция ω .

3.3. AUSMPW+

В развитие схемы AUSMPW предложено использование значений параметров ячеек в соответствии с рис. 4.

После модификации соотношения (22) и (23) в схеме AUSMPW+ принимают вид:

$$\text{при } M_{1/2} = f_L^+ + f_R^- \geq 0 \quad \begin{cases} \tilde{f}_L^+ = f_L^+ + f_R^- [(1-\omega)(1+F_R) - F_L], \\ \tilde{f}_R^- = f_R^- \omega (1 + F_R), \end{cases} \quad (27)$$

$$\text{при } M_{1/2} < 0 \quad \begin{cases} \tilde{f}_L^+ = f_L^+ \omega (1 + F_L), \\ \tilde{f}_R^- = f_L^+ + f_R^- [(1-\omega)(1+F_L) + F_L + F_R] \end{cases} \quad (28)$$

Для функций f_L^+ , f_R^- применяются соотношения (13).

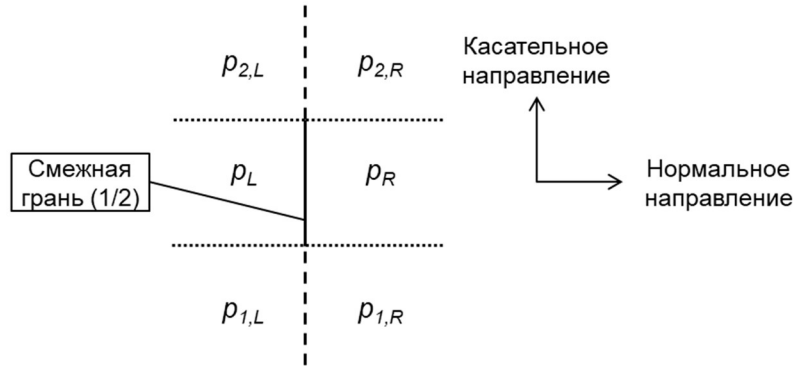


Рис. 4. К определению весовой функции F в схеме AUSMPW+

Соотношение для вычисления значений весовой функций F упрощено до

$$F_{L/R} = \begin{cases} \left(\frac{p_{L/R}}{p_{1/2}} - 1 \right) \times \min \left(1, \frac{\min(p_{1,L}, p_{1,R}, p_{2,L}, p_{2,R})}{\min(p_L, p_R)} \right), & p_{1/2} \neq 0, \\ 0, & p_{1/2} = 0, \end{cases} \quad (29)$$

где $p_{1/2}$ определяется из соотношения (12) с использованием соотношений (19).

При этом определение скорости звука отличается от соотношений схемы AUSMPW:

$M_{L/R} = \frac{u_{L/R}}{c}$, $u_{L/R}$, $v_{L/R}$ – нормальная и касательная к границе компоненты скорости;

$$c = \begin{cases} \frac{c_{1/2}^2}{\max(|u_L|, c_{1/2})}, & u_L + u_R \geq 0, \\ \frac{c_{1/2}^2}{\max(|u_R|, c_{1/2})}, & u_L + u_R < 0; \end{cases}$$

$$c_{1/2} = \sqrt{\frac{2H(\gamma-1)}{(\gamma+1)}} \text{ – критическая скорость звука;}$$

$$H = \frac{1}{2} \left[H_L - \frac{(v_L)^2}{2} + H_R - \frac{(v_R)^2}{2} \right] \text{ – энтальпия на смежной границе;}$$

$$H_{L/R} = \frac{c_{L/R}}{(\gamma-1)} \text{ – энтальпия потока;}$$

$$c_{L/R} = \sqrt{\gamma \frac{p_{L/R}}{\rho_{L/R}}} \text{ – скорость звука вблизи смежной границы.}$$

3.5. AUSM⁺-up

Основная идея подхода AUSM⁺-up аналогична исходной схеме AUSM. Поток массы определяется по противопоточному правилу

$$\dot{m} = M_{1/2} c_{1/2} \begin{cases} \rho_L, M_{1/2} > 0, \\ \rho_R, M_{1/2} \leq 0. \end{cases} \quad (20)$$

Число $M_{1/2}$ расщепляется на вклад слева f_L^+ и справа f_R^- по следующему алгоритму с использованием соотношений (14)

$$M_{1/2} = f_L^+ + f_R^- + M_p \quad (30)$$

M_p – диффузионный член, который необходим для улучшения численных расчетов при низких и трансзвуковых скоростях и определяется из соотношения

$$M_p = -\frac{K_p}{f_a} \max(1 - \sigma \bar{M}^2, 0) \frac{p_R - p_L}{\bar{\rho} c_{1/2}^2}, \quad (31)$$

где: $\bar{\rho} = \frac{\rho_L + \rho_R}{2}$ – осредненная плотность;

$$f_a(M_0) = M_0(2 - M_0);$$

$$M_0^2 = \min(1, \max(\bar{M}^2, M_{co}^2));$$

$$\bar{M}^2 = \frac{M_L^2 + M_R^2}{2};$$

$$c_{1/2} = \min(\tilde{c}_L, \tilde{c}_R);$$

$$\tilde{c}_R = c^{*2} / \max(c^*, -V_n^-);$$

$$\tilde{c}_L = c^{*2} / \max(c^*, V_n^+);$$

$$c^{*2} = \frac{2(\gamma-1)}{\gamma+1} H \text{ – квадрат критической скорости звука.}$$

M_{co} – параметр, имеющий порядок числа Маха набегающего потока M_∞ .

Функция *max* необходима для исключения диффузионного члена при больших числах Маха, что в свою очередь влияет на расчет числа Маха на границе при $\bar{M}^2 \leq 1/\sigma$.

$K_p \in [0; 1]$ – коэффициент, определяющий, насколько сильно давление на границе ячеек корректируется в зависимости от локальной скорости потока. При больших M – помогает избежать осцилляций вблизи ударных волн; при малых M – сохраняет корректное поведение схемы в низкоскоростных областях.

$\sigma \in [0; 1]$ – параметр, контролирующий «переключение» между высокоскоростным и низкоскоростным режимами работы схемы. Он определяет ширину переходной зоны, где схема адаптируется к изменению числа Маха, и тем самым влияет на баланс между диссипацией и разрешением структуры потока (в том числе тонких ударных волн и контактных разрывов).

В большинстве практических реализаций данной схемы для определения указанных параметров используют традиционные значения, предложенные в [54]: $K_p = 0.25$, $\sigma = 1$. Эти значения подобраны эмпирически для широкого класса задач. Однако для конкретной задачи допускается их изменение.

Для функции давления расщепление производится по следующему алгоритму с использованием соотношений (19) при $\alpha = \frac{3}{16}(-4 + 5f_a^2) \in \left[-\frac{3}{4}; \frac{3}{16}\right]$

$$p_{1/2} = \phi_L^+ p_L + \phi_R^- p_R + p_u \quad (32)$$

Диффузионный член p_u определяется из соотношения

$$p_u = -K_u \phi_L^+ \phi_R^- (\rho_L - \rho_R) f_a c_{1/2} (V_n^- - V_n^+), \quad (33)$$

где $K_u = 0.75$.

3.6. AUSM⁺-up2

В данной схеме развитие схемы AUSM⁺-up заключается в изменении соотношения для определения диффузионного члена p_u при расщеплении давления, при этом расщепление числа Маха производится аналогичным исходной схеме образом:

$$p_u = \frac{p_L + p_R}{2} + \frac{f_p^+ - f_p^-}{2} (p_L - p_R) + \sqrt{\frac{u_L^2 + v_L^2 + w_L^2 + u_R^2 + v_R^2 + w_R^2}{2}} (f_p^+ + f_p^- - 1) \bar{\rho} c_{1/2} \quad (34)$$

3.7. SLAU

Расщепление потока в данной схеме реализуется по следующему алгоритму:

$$F_{1/2} = F_{\rho V}^L + F_{\rho V}^R + F_p = \frac{\dot{m} + |\dot{m}|}{2} (1 \ u \ v \ w \ H)_L^T + \frac{\dot{m} - |\dot{m}|}{2} (1 \ u \ v \ w \ H)_R^T + F_p, \quad (35)$$

где: $\dot{m} = \frac{1}{2} \left[\rho_L (u_L^n + |\mathbf{u}|^+) + \rho_R (u_R^n - |\mathbf{u}|^-) - \frac{\chi}{c_{1/2}} \Delta p \right],$

$$|\mathbf{u}|^+ = (1 - g)|\mathbf{u}| + g|u_L^n|, \quad |\mathbf{u}|^- = (1 - g)|\mathbf{u}| + g|u_R^n|, \quad |\mathbf{u}| = \frac{\rho_L |\mathbf{u}| + \rho_R |\mathbf{u}|}{\rho_L + \rho_R},$$

$$g = -\max[\min(M_L, 0), -1] \times \min[\max(M_R, 0), 1] \in [0; 1].$$

Расщепление акустического потока выполняется с использованием соотношения (32), однако диффузионный член p_u определяется из соотношения

$$p_u = \frac{p_L + p_R}{2} + \frac{\phi_L^+ - \phi_R^-}{2} (p_L - p_R) + (1 - \chi) (\phi_L^+ + \phi_R^- - 1) \frac{p_L + p_R}{2}, \quad (36)$$

где $\chi = (1 - \hat{M})^2$, $\hat{M} = \min \left(1.0, \frac{1}{c_{1/2}} \sqrt{\frac{u_L^2 + v_L^2 + w_L^2 + u_R^2 + v_R^2 + w_R^2}{2}} \right).$

Для функций ϕ_L^+ , ϕ_R^- применяются аппроксимационные соотношения (14) при

$$M = \frac{un^x + vn^y + wn^z}{c_{1/2}}, \quad c_{1/2} = \frac{c_L + c_R}{2}, \quad c_{L/R} = \sqrt{\gamma \frac{p_{L/R}}{\rho_{L/R}}}.$$

3.8. SLAU2

Развитие схемы SLAU при реализации данной схемы связано с модификацией соотношения для определения диффузионного члена p_u

$$p_u = \frac{p_L + p_R}{2} + \frac{\varphi_L^+ - \varphi_R^-}{2} (p_L - p_R) + \sqrt{\frac{u_L^2 + v_L^2 + w_L^2 + u_R^2 + v_R^2 + w_R^2}{2}} (\varphi_L^+ + \varphi_R^- - 1) \bar{\rho} c_{1/2}. \quad (37)$$

4. Сравнение схем семейства алгоритмов AUSM на тестовых задачах

Для сравнения эффективности различных методов решения задачи Римана о распаде произвольного разрыва традиционно используются следующие тестовые задачи:

- задача Сода (Sod shock tube) [74] – для проверки разрешения ударных волн и волн разрежения;
- задача Лакса (Lax problem) [75] – для оценки устойчивости и точности на сильных разрывах.

Исследование эффективности различных численных схем применительно к решению задач высокоскоростной аэротермодинамики – крайне трудоемкая задача, требующая их предварительной программной реализации и множества расчетов, что приводит к необходимости выполнения полноценного объемного исследования. В качестве примера таких работ, представляющих особую важность на этапе выбора наиболее «универсальной» или подходящей под конкретную задачу схемы, можно привести [38, 62, 68, 69, 73].

Руководствуясь результатами работ, упомянутых ранее, можно выделить основные достоинства и недостатки наиболее популярных схем, а также предположить целесообразность применения той или иной схемы, что весьма важно при решении задач аэротермодинамики по причине большого разнообразия проводимых численных исследований.

5. Достоинства и недостатки схем семейства алгоритмов AUSM

Примерами успешной реализации схем семейства алгоритмов AUSM для приближенного решения задачи Римана о распаде произвольного разрыва могут служить следующие авторские компьютерные коды, разработанные в ИПМех РАН, прошедшие многократную валидацию и верификацию и длительное время применяемые при решении задач высокоскоростной аэротермодинамики, в том числе практических:

- 1) UST3D, разработанный С. Т. Суржиковым [76] и реализующий метод донорных ячеек, сопряженный с AUSM-методом [77];
- 2) HySol, разработанный И. А. Крюковым [78] и реализующий «классический» метод точного решения задачи Римана о распаде произвольного разрыва [36, 37] и методы AUSM⁺[51], AUSM⁺-up [54], AUSMPW⁺[56], SLAU2 [66], ADAUSM [71], AUPM [72];
- 3) UST3D_AUSMPW, разработанный П.В. Сильвестровым [79] и реализующий метод AUSMPW [55];
- 4) UST3D_AUSMUP2, разработанный И. А. Корюковым [80] и реализующий метод AUSM⁺-up2 [68, 69].

Достоинства и недостатки модификаций схемы AUSM, рассмотренных ранее, можно представить в виде сводной таблицы по нескольким критериям, имеющим наибольшую важность при решении задач высокоскоростной аэротермодинамики летательных аппаратов различной конфигурации (табл. 1).

Таблица 1

Сравнительный анализ схем семейства алгоритмов AUSM

Критерий	Точность при $M = 3 \dots 10$	Устойчивость	Вычислительная эффективность	Чувствительность к сетке	Наличие настроечных параметров
AUSM	<u>Средняя</u> Хорошо разрешает ударные волны и контактные разрывы, но на некоторых сетках даёт нефизичные осцилляции	<u>Низкая</u> Чувствительна к качеству сетки и может проявлять неустойчивость вблизи сильных разрывов	<u>Высокая</u> Простая структура	<u>Высокая</u> На грубых сетках возможны сильные осцилляции	—
AUSM ⁺	<u>Выше AUSM</u> Лучше разрешает разрывы, сохраняет положительность плотности, снижает риск осцилляций	<u>Выше AUSM</u> Однако может давать нефизичные пики давления вблизи сильных ударов	<u>Высокая</u> Простая структура	<u>Ниже AUSM</u> При очень грубых сетках проблемы возможны	—
AUSMPW	<u>Высокая</u> Введение весовых функций позволяет учитывать состояния слева и справа, что повышает точность на высокоскоростных режимах	<u>Высокая</u> Лучше подавляет нефизичные пики давления	<u>Умеренная</u> Добавление весовых функций несколько усложняет вычисления	<u>Низкая</u>	—
AUSMPW ⁺	<u>Очень высокая</u> Развитие AUSMPW с многомерной диссипацией – хорошо работает в сложных конфигурациях	<u>Очень высокая</u> Эффективно подавляет аномалии ударных волн	<u>Умеренная</u> Необходимость учета четырех соседних ячеек при определении значения весовой функции F	<u>Низкая</u>	—
AUSM ⁺ -up	<u>Высокая</u> Добавлены диффузионные поправки в число Маха и поток давления, что сглаживает переход через $M = 1$	<u>Высокая</u> Хорошо работает как в дозвуковых, так и в сверхзвуковых режимах	<u>Умеренная</u> Дополнительные члены в потоках	<u>Низкая</u>	<u>Параметры диссипации</u> (K_p, K_u), подбор которых критичен: при малых значениях схема может быть менее устойчивой, при больших – более устойчивой, но более диффузной

Продолжение Таблицы 1

Критерий	Точность при $M = 3 \dots 10$	Устойчивость	Вычислитель- ная эффек- тивность	Чувстви- тельность к сетке	Наличие настроечных параметров
AUSM⁺-up2	<u>Высокая</u> В этой версии по- ток давления заме- нён на поток из SLAU2 – диссипа- ция теперь пропор- ционально растёт с числом Маха (при $M > 1$), что повы- шает робастность	<u>Очень высокая</u> Лучше противो- стоит различ- ным аномалиям ударных волн	<u>Умеренная</u> Замена потока давления до- бавляет вы- числений	<u>Низкая</u>	<u>Параметры диссипации</u> (K_p, K_u), анало- гично схеме AUSM ⁺ -up
SLAU	<u>Средняя</u> Из-за низкой чис- ленной диссипа- ции в некоторых тестах показывает осцилляции при сильных ударах	<u>Средняя</u> На неструкту- рированных сетках может проявлять не- стабильность ударных волн	<u>Высокая</u> Простая структура	<u>Средняя</u>	—
SLAU2	<u>Выше SLAU</u> Введена новая член диссипации в поток давления — это улучшает ста- бильность при сильных ударах	<u>Высокая</u> В комбинации с точным решате- лем Римана применима к сложным зада- чам с высоким градиентом дав- ления	<u>Умеренная</u> Дополнитель- ный член в по- токе	<u>Низкая</u>	—

6. Заключение

Решению задачи Римана о распаде произвольного разрыва уделяется значительное внимание при разработке авторских компьютерных кодов для численного моделирования движения высокоскоростных летательных аппаратов в газовом потоке на неструктурированных тетраэдральных расчетных сетках.

Среди многообразия приближенных методов выделяется семейство алгоритмов AUSM, для которого основные модификации можно кратко охарактеризовать следующим образом:

- 1) AUSM – «прародитель» семейства алгоритмов, проста в реализации и высокоэффективна с вычислительной точки зрения, хорошо справляется с областями сильных градиентов давления и не дает осцилляций на медленно движущихся ударных волнах, однако подвержена эффекту «карбункула»;
- 2) AUSM⁺ – сохраняет простоту и эффективность реализации, точно разрешает контактные и ударные разрывы, эффект «карбункула» минимизирован, однако может возникать неустойчивость;
- 3) AUSMPW – на высокоскоростных режимах с высокими градиентами скорости и давления введение весовых функций позволило подавить численные неустойчивости, снизить нефизичные аномалии типа «карбункул», обеспечить высокое разрешение контактных разрывов и ударных волн, повысить вычислительную сходимость, однако на чисто дозвуковых режимах решение в некоторых случаях может становиться нефизичным;
- 4) AUSMPW⁺ – в дополнение к преимуществам схемы AUSMPW ввод многомерной диссипации обеспечивает более эффективное гашение многомерных неустойчивостей и

аномалий при расчете сильных ударных волн (в том числе при моделировании многофазных течений), баланс между устойчивостью и диссипацией позволяет сохранять хорошую стабильность, однако данная схема более требовательна к вычислительным ресурсам (несмотря на оптимизацию весовых функций) и также (как исходная AUSMPW) имеет особенности на чисто дозвуковых течениях;

- 5) AUSM⁺-up – обеспечивает расчет течений на всех режимах (в том числе дозвуковых) за счет введения диффузионных членов при расщеплении числа Маха и давления, эффективно борется с численными аномалиями и неустойчивостями, однако в некоторых случаях может требоваться очень малое значение числа Куранта, что приводит к увеличению количества итераций;
- 6) AUSM⁺-up2 – применение алгоритма определения потока давления из схемы SLAU2 позволяет не только масштабировать численную диссипацию при низких числах Маха, но и обеспечивает пропорциональный рост на сверхзвуковых режимах, что повышает устойчивость к различным аномалиям, связанным с ударными волнами, однако требует аккуратного подбора параметров схемы
- 7) SLAU – отличается низкой диссипацией на низкоскоростных режимах при сохранении устойчивости на высокоскоростных режимах, не требует настройки параметров и показывает хорошие результаты в широком диапазоне чисел Маха, однако подвержена осцилляциям при наличии сильных ударных волн;
- 8) SLAU2 – за счет пропорционально масштабируемой диссипации обеспечивает стабильный захват ударных волн на высокоскоростных режимах и высокое разрешение течений на низкоскоростных режимах, однако в отдельных случаях (например, при двойном маховском отражении) могут проявляться осцилляции за косой ударной волной.

Достоинства, недостатки и границы применимости различных модификаций исходной схемы AUSM, приведенные в данной работе, позволяют выбирать подходящие модели для конкретной задачи, а также сделать выбор в пользу более универсальной схемы. Так, например, для решения практических задач высокоскоростной аэротермодинамики при необходимости оптимизации ресурсно-вычислительных затрат с целью получения оперативных данных численного моделирования в широком диапазоне чисел Маха предпочтительным выглядит использование схемы AUSMPW, которая обеспечивает разрешение ударно-волновой картины с достаточной точностью [81] и при этом менее требовательна к аппаратному обеспечению по сравнению с AUSMPW⁺ и SLAU2 и к квалификации специалиста-расчетчика по сравнению со схемами AUSM⁺-up и AUSM⁺-up2 (по причине наличия в последних настроечных параметров).

Компьютерные коды с реализованной схемой AUSMPW показали хорошее качество распределения газодинамических параметров при решении задач высокоскоростной аэродинамики и исследовании ударно-волновых взаимодействий в работах [79–81].

Литература

1. Albertson C.W., Venkat V.S. Shock interaction control for scramjet cowl leading edges // AIAA Paper 2005-3289. 2005.
2. Боровой В.Я., Егоров И.В., Мошаров В.Е., Скуратов А.С., Радченко В.Н. Экстремальный нагрев тел в гиперзвуковом потоке: Газодинамические явления и их характеристики. М.: Наука, 2018. 390 с.
3. Суржиков С.Т. Аналитические методы построения конечно-разностных сеток для расчета аэротермодинамики спускаемых космических аппаратов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2004. Вып. 2. С. 24–50
4. Суржиков С.Т. Расчетный анализ экспериментальных данных по аэротермодинамике гиперзвукового аппарата HIFiRE-1 // Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки, 2020. Т. 495, вып. 1. С. 68–72.

5. Суржигов С.Т. Численная интерпретация экспериментальных данных по аэродинамике модели НВ-2 с использованием компьютерных кодов USTFEN и PERAT-3D // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2020. Т. 21, вып. 1. <http://chemphys.ipmnet.ru/issues/2020-21-1/articles/900/>
6. Яцухно Д.С. Исследование аэротермодинамики высокоскоростных летательных аппаратов с использованием моделей совершенного и реального газа: диссертация ... кандидата физико-математических наук: 01.02.05 // Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук. – Москва, 2019. – 167 с.: ил.
7. Голубев А.Г., Ремизова О.И. Моделирование сверхзвукового обтекания затупленного конуса в пакете ANSYS Fluent с использованием двух различных способов построения расчетной сетки // Инженерный журнал: наука и инновации. 2018. Т. 83, вып. 11. DOI: 10.18698/2308-6033-2018-11-1821
8. Viviani A., Pezzella G., Golia C. Aerothermodynamic Field Past a Reentry Capsule for Sample Return Missions // 28th international congress of the aeronautical sciences. 2012.
9. Lamby P., Parametric Multi-Block Grid Generation and Application to Adaptive Flow Simulations, Doctor's degree diss., Aachen, RWTH Aachen University, 2007, 205 p.
10. Zauner M., Sandham N. D. Multiblock structured grids for direct numerical simulations of transonic wing sections // 10th International Conference on Computational Fluid Dynamics (ICCFD10). 2018.
11. Alter S.J., Weilmuenster K.J. The three-dimensional Multi-Block Advanced Grid Generation System (3DMAGGS) // NASA TM-108985. 1993.
12. Assam A. Development of an Unstructured CFD Solver for External Aerothermodynamics and Nano/Micro Flows, Ph. D. thesis, Kharagpur, IIT KGP, 2019, 217 p.
13. Волков К.Н., Дерюгин Ю.Н., Емельянов В.Н., Карпенко А.Г., Козелков А.С. Методы ускорения газодинамических расчётов на неструктурированных сетках. М.: Физматлит, 2014. 536 с.
14. Koryukov I.A., Kryukov I.A. Three-dimensional calculation of the aerothermodynamics of a double cone 25°/55° on an unstructured grid // Journal of Physics: Conference Series. 2018. Vol. 1009, p. 012003.
15. Figueira da Silva L.F., Azevedo J.L.F., Korzenowski H. Unstructured Adaptive Grid Flow Simulations of Inert and Reactive Gas Mixtures // Journal of Computational Physics. 2000. Vol. 160, No. 2. Pp. 522-540.
16. Pirzadeh S.Z. Advanced Unstructured Grid Generation for Complex Aerodynamic Applications // AIAA Journal. 2010. Vol. 48, No. 5. Pp. 904–915.
17. Bessonov O. Efficient Cluster Parallelization Technology for Aerothermodynamics Problems // Parallel Computing Technologies, Cham: Springer International Publishing, 2021. Pp. 153–165. DOI:10.1007/978-3-030-86359-3_12
18. Batina J.T., Lee E.M., Kleb W.L., Rausch R. D. Unstructured-grid methods development for unsteady aerodynamic and aeroelastic analyses // NASA Langley Research Center. 1991.
19. Bonfiglioli A., Paciorri R. Hypersonic Flow Computations on Unstructured Grids: Shock-Capturing vs. Shock-Fitting Approach // 40th Fluid Dynamics Conference and Exhibit. AIAA 2010-4449. 2010.
20. Исаев С.А., Баранов П.А., Гортышов Ю.Ф., Гувернюк С.В., Мазо А.Б., Смуров М.Ю., Судачков А.Г., Усачов А.Е., Харченко В.Б. Аэродинамика утолщенных тел с вихревыми ячейками. Численное и физическое моделирование. СПб.: Изд-во Политех. ун-та, 2016. 215 с.
21. Gnoffo P., White J. Computational Aerothermodynamic Simulation Issues on Unstructured Grids // 37th AIAA Thermophysics Conference. 2004.
22. Tahmasbi V., Karimian S. A New Algorithm for Shock Sensor Calculation at Supersonic Speeds on a 3D-Unstructured Grid // J. Aerosp. Technol. Manag. 2016. Vol.8, No. 4. Pp.441–450.
23. Mavriplis D.J. Unstructured-Mesh Discretizations and Solvers for Computational Aerodynamics // AIAA Journal. 2008. Vol. 46, No. 6. Pp. 1281–1298.

24. Bonfiglioli A., Paciorri R. Comparative Study of Stagnation Point Anomalies by Means of Shock Capturing and Shock Fitting Unstructured Codes // Sixth European Symposium on Aerothermodynamics for Space Vehicles. 2009.
25. Mazaheri A.R., Kleb B. Exploring Hypersonic. Unstructured-Grid Issues through Structured Grids // AIAA Paper 2007-4462. 2007.
26. Воронич И.В., Смирнова Н.С., Титарев В.А. Алгоритм адаптации расчётной сетки к полю течения, содержащему головной скачок уплотнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2024. Т. 64, вып. 9. С. 1737–1748.
27. Peter J., Nguyen-Dinh M., Trontin P. Goal oriented mesh adaptation using total derivative of aerodynamic functions with respect to mesh coordinates – With applications to Euler flows // Computers & Fluids. 2012. Vol. 66. Pp. 194-214.
28. Peraire J., Peiró J., Morgan K., Hassan O. The Computation of Aerodynamic Flows Using Unstructured Meshes // The finite element method in the 1990's, Heidelberg: Springer Berlin, 1992. Pp. 452–464.
29. Edwards J.E.H. Adaptive Quadrilateral and Triangular Finite-Element Scheme for Compressible Flows // AIAA Journal. 1990. Vol. 28, No. 1. Pp. 51–59.
30. Schwing A.M., Nompelis I., Candler G.V. Implementation of Adaptive Mesh Refinement in an Implicit Unstructured Finite-Volume Flow Solver // 21st AIAA Computational Fluid Dynamics Conference. 2013.
31. Nguyen-Dinh M., Peter J., Sauvage R., Meaux M., Desideri J.-A. Mesh quality assessment based on aerodynamic functional output total derivatives // European Journal of Mechanics B/Fluids. 2013.
32. Котов Д.В., Суржиков С.Т. Расчет течений вязкого и невязкого газа на неструктурированных сетках с использованием схемы AUSM // Вычислительная механика сплошных сред. 2011. Т. 4, вып. 1. С. 36–54.
33. Котов Д.В., Суржиков С.Т. Расчет гиперзвукового течения химически реагирующего газа в ГПВРД методом конечного объема с использованием схемы AUSM // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2011. Т. 11. <http://chemphys.ipmnet.ru/issues/2011-11/articles/174/>
34. Суржиков С.Т. Метод конечного объема для решения задач механики сплошной среды и теплообмена излучением // С.Т. Суржиков, Е.П. Пономарёв; Ин-т проблем механики РАН. – Москва: ИПМех РАН, 1999. – 24 с. – (Препринт / Ин-т проблем механики РАН; № 645).
35. Сакович В.С., Сорокин А.М. Применение неструктурированных сеток для расчета вязкого обтекания многоэлементных профилей // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1997. Т. 37, вып. 10. С. 1269–1280.
36. Годунов С.К. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
37. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений гидродинамики // Математический сборник. 1959. Т. 47(89), вып. 3. С. 271–306.
38. Железнякова А.Л. Анализ эффективности современных численных схем решения задачи о распаде произвольного разрыва в рамках метода расщепления по физическим процессам для расчета гиперзвуковых течений // Физико-химическая кинетика в газовой динамике, 2014. Т. 15, вып. 5. <http://chemphys.ipmnet.ru/issues/2014-15-5/articles/255/>
39. Harten A., Lax P., van Leer B. On upstream differencing and Godunov type methods for hyperbolic conservation laws // SIAM review. 1983. Vol. 25. Pp. 35–61.
40. Toro E.F., Spruce M., Speares W. Restoration of the contact surface in the HLL Riemann solver // J. Shock Waves. 1994. Vol. 4. Pp. 25–34.
41. Toro B.F., Chakraborty A. Development of an approximate Riemann solver for the steady supersonic Euler equations // The Aeronautical Journal. 1994. Vol. 98. Pp. 325–339.
42. Русанов В.В. Расчет взаимодействия нестационарных ударных волн с препятствиями // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1961. Т. 1, вып.2. С. 267–279.

43. Roe P.L. Approximate Riemann solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes // J. Comput. Phys. 1981. Vol. 43. Pp. 357–372.
44. Engquist B., Osher S. One-sided difference approximations for nonlinear conservation laws // Math. Comp. 1981. Vol. 36, No. 154. Pp. 321–351.
45. Osher S., Solomon F. Upwind difference schemes for hyperbolic systems of conservation laws // Math. Comp. 1982. Vol. 38, No. 158. Pp. 339–374.
46. Osher S., Chakravarthy S.R. Upwind schemes and boundary conditions with applications to Euler equations in general geometries // J. Comput. Phys. 1983. Vol. 50. Pp. 447–481.
47. Steger J.L., Warming R.F. Flux vector splitting of the inviscid gasdynamic equations with application to finite-difference methods // J. Comput. Phys. 1981. Vol. 40. Pp. 263–293.
48. van Leer. B. Flux-Vector Splitting for the Euler Equations // ICASE Report 82–30, NASA Langley Research Center. 1982.
49. van Leer. B. Flux Vector Splitting for the Euler Equations // Proc. 8th International Conference on Numerical Methods in Fluids Dynamics, Springer-Verlag, Berlin. 1982. Pp. 507–512.
50. Liou M.S., Steffen C.J. A new flux splitting scheme // Journal of Computational physics. 1993. Vol. 107, No. 1. Pp. 23–39.
51. Liou M.S. A Sequel to AUSM: AUSM+ // Journal of Computational Physics. 1996. Pp. 364–382.
52. Wada Y., Liou M.S. An accurate and robust flux splitting scheme for shock and contact discontinuities // SIAM J. Scientific Computing. 1997. Pp. 633–657.
53. Liou M.S. Recent progress and applications of AUSM+ // Sixteenth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics, Lecture Notes in Physics, Springer-Verlag, 1998. Vol. 515. Pp. 302–307.
54. Liou M.S. A Sequel to AUSM, Part II: AUSM+-up // Journal of Computational Physics. 2006. Pp. 137–170.
55. Kim K.H., Lee J.H., Rho O.H. An improvement of AUSM schemes by introducing the pressure-based weight functions // Computers & fluids. 1998. Vol. 27, No. 3. Pp. 311–346.
56. Kim K.H., Kim C., Rho O.H. Methods for the Accurate Computations of Hypersonic Flows I. AUSMPW+ Scheme // Journal of Computational Physics. 2001. Vol. 174, No. 1. Pp. 38–80.
57. Chang C.H., Liou M.S. A New approach to the simulation of compressible multifluid flows with AUSM+ scheme // 16th AIAA CFD Conference. AIAA Paper 2003-4107. 2003.
58. Edwards J.R., Franklin R., Liou M.S. Low-Diffusion Flux-Splitting Methods for Real Fluid Flows with Phase Transitions // AIAA J. 2000. Vol. 38, No. 9. Pp. 1624–1633.
59. Edwards J.R., Liou M.S. Low-diffusion flux-splitting methods for flows at all speeds // AIAA J. 1998. Vol. 36, No. 9. Pp. 1610–1617.
60. Yatsukhno D.S. Application of the finite volume method for the standard ballistic model aerodynamics calculations // Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 1250, №1. Art. 012011.
61. Peery K.M., Imlay S.T. Blunt Body Flow Simulations // AIAA Paper 88-2924. 1988.
62. Liou M.S. Ten Years in the Making: AUSM-Family // AIAA Paper 2001-2521. 2001.
63. Liou M.S., Wada Y. A Flux Splitting Scheme with High-Resolution and Robustness for Discontinuities // AIAA Paper 94-0083. 1994.
64. Billet G., Louedin O. adaptive limiters for improving the accuracy of the MUSCL approach for unsteady flows // Journal of Computational Physics. 2001. Vol. 170, No. 1. Pp. 161–183.
65. Shima E., Kitamura K. Parameter-free simple low-dissipation AUSM-family scheme for all speeds // AIAA Paper 1693-1709. 2011. Vol. 49.
66. Kitamura K., Shima E. A new pressure flux for AUSM-family schemes for hypersonic heating computations // 20th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference. 2011. Pp. 3056.
67. Kitamura K., Shima E. Towards shock-stable and accurate hypersonic heating computations: A new pressure flux for AUSM-family schemes // Journal of Computational Physics. 2013. Vol. 245. Pp. 62–83.

68. Kitamura K., Liou M.S., Chang C.H. Extension and Comparative Study of AUSM-Family Schemes for Compressible Multiphase Flow // *Communications in Computational Physics*. 2014. Vol. 16, No. 3. Pp. 632–674.
69. Kitamura K. Assessment of SLAU2 and other flux functions with slope limiters in hypersonic shock-interaction heating // *Computers & Fluids*. 2016. Vol. 129. Pp. 134–145.
70. Chen S., Cai F., Xue H., Wang N., Yan C. An improved AUSM-family scheme with robustness and accuracy for all Mach number flows // *Applied Mathematical Modelling*. 2019.
71. Singh R., Holmes G. Evaluation of an artificial dissipation and AUSM based flux formulation: AD-AUSM // *AIAA Paper* 2000-3069. 2012.
72. Chen S.-S., Yan C., Zhong K., Xue H.-C., Li, E.-L. A novel flux splitting scheme with robustness and low dissipation for hypersonic heating prediction // *Int. J. of Heat and Mass Transfer*. 2018. Vol. 127. Pp. 126–137.
73. Kitamura K. *Advancement of Shock Capturing Computational Fluid Dynamics Methods: Numerical Flux Functions in Finite Volume Method*. Singapore: Springer Nature. 2020. 142 p.
74. Sod G.A. A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws // *Journal of Computational Physics*. 1978. Vol. 27. Pp. 1–31.
75. Lax P.D., Liu X.D. Solution of two-dimensional Riemann problems of gas dynamics by positive schemes // *SIAM Journal on Scientific Computing*. 1998. Vol. 19. Pp. 319–340.
76. Железнякова А.Л., Суржиков С.Т. Применение метода расщепления по физическим процессам для расчета гиперзвукового обтекания пространственной модели летательного аппарата сложной формы. // *ТВТ*. 2013. Т. 51, вып. 6. С. 897–911.
77. Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М. Метод крупных частиц в газовой динамике. М.: Наука, 1982. 391 с.
78. Крюков И.А., Иванов И.Э., Ларина Е.В. Верификация программного комплекса hysol для расчета высокоскоростных течений. // *Материалы XX Юбилейной Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС 2017)*. М.: Изд-во МАИ-Принт. 2017.
79. Сильвестров П.В. Определение аэродинамических характеристик перспективных летательных аппаратов с использованием комплекса авторских компьютерных кодов: диссертация ... кандидата физико-математических наук: 01.02.05 // *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук*. – Москва, 2021. – 257 с.: ил.
80. Корюков И.А. Численное моделирование ударно-волновых взаимодействий в высокоскоростных потоках газа: диссертация ... кандидата физико-математических наук: 1.1.9. // *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук; Диссовет 24.1.098.01 (Д 002.240.XX)*. – Москва, 2026. – 146 с.: ил.
81. Ишин Д. В. Численное моделирование интерференционного взаимодействия ударных волн вблизи пластины с цилиндрическим притуплением // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*. 2026. Т. 27, вып. 3. <http://chemphys.ipmnet.ru/issues/2026-27-3/articles/1281/>

References

1. Albertson C.W., Venkat V.S., Shock interaction control for scramjet cowl leading edges, *AIAA Paper* 2005-3289, 2005.
2. Borovoy V. Ya., Egorov I.V., Mosharov V.E., Skuratov A.S., Radchenko V.N., *Extreme heating of bodies in a hypersonic flow: gas-dynamic phenomena and their characteristics*, Moscow, Nauka, 2018, 390 p. [in Russian].
3. Surzhikov S.T., Analytical methods of building finite-difference mesh for computation of aerothermodynamics of descending spacecrafts, *Herald of the Bauman Moscow State Technical University Series Mechanical Engineering*, 2004, no. 2, pp. 24–50. [in Russian]

4. Surzhikov S.T., Calculated analysis of experimental data on the aerothermodynamics of the hypersonic aircraft HIFiRe-1, *Doklady physics*, 2020, vol. 65, no. 11, pp. 400–404 [in Russian].
5. Surzhikov S.T., Numerical interpretation of experimental data on aerodynamics of the HB-2 model using computer codes USTFEN and PERAT-3D, *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, 2020, vol. 21, no. 1 [in Russian]. <http://chemphys.ipmnet.ru/issues/2020-21-1/articles/900/>
6. Yatsukhno D.S., Investigation of the aerothermodynamics of high-speed aircraft using perfect and real gas models, Cand. phys.-math. sci. diss., Moscow, IPMech RAS, 2019, 167 p. [in Russian]
7. Golubev A.G., Remizova O.I., Cones in ANSYS Fluent with the usage of two different methods for constructing a computational grid, *Engineering Journal: Science and Innovation*, 2018, vol. 83, no. 11, pp. 1–11. DOI: 10.18698/2308-6033-2018-11-1821
8. Viviani A., Pezzella G., Golia C., Aerothermodynamic Field Past a Reentry Capsule for Sample Return Missions, *28th International Congress of the Aeronautical Sciences*, 2012.
9. Lamby P., Parametric Multi-Block Grid Generation and Application to Adaptive Flow Simulations, Doctor's degree diss., Aachen, RWTH Aachen University, 2007, 205 p.
10. Zauner M., Sandham N. D., Multiblock structured grids for direct numerical simulations of transonic wing sections, *10th International Conference on Computational Fluid Dynamics (ICCFD10)*, 2018.
11. Alter S.J., Weilmuenster K.J., The three-dimensional Multi-Block Advanced Grid Generation System (3DMAGGS), NASA TM-108985, 1993.
12. Assam A., Development of an Unstructured CFD Solver for External Aerothermodynamics and Nano/Micro Flows, Ph. D. thesis, Kharagpur, IIT KGP, 2019, 217 p.
13. Volkov K.N., Deryugin Yu.N., Emelyanov V.N., Karpenko A.G., Kozelkov A.S., *Methods for accelerating gasdynamic calculations on unstructured grids*, Moscow, Fizmatlit, 2014, 536 p. [in Russian]
14. Koryukov I.A., Kryukov I.A., Three-dimensional calculation of the aerothermodynamics of a double cone 25°/55° on an unstructured grid, *Journal of Physics: Conference Series*, 2018. Vol. 1009, p. 012003.
15. Figueira da Silva L.F., Azevedo J.L.F., Korzenowski H., Unstructured Adaptive Grid Flow Simulations of Inert and Reactive Gas Mixtures, *Journal of Computational Physics*, 2000, vol. 160, no. 2, pp. 522-540.
16. Pirzadeh S.Z., Advanced Unstructured Grid Generation for Complex Aerodynamic Applications, *AIAA Journal*, 2010, vol. 48, no. 5, pp. 904–915.
17. Bessonov O., Efficient Cluster Parallelization Technology for Aerothermodynamics Problems, *Parallel Computing Technologies*, Cham, Springer International Publishing, 2021, pp. 153–165. DOI:10.1007/978-3-030-86359-3_12
18. Batina J.T., Lee E.M., Kleb W.L., Rausch R. D., Unstructured-grid methods development for unsteady aerodynamic and aeroelastic analyses, *NASA Langley Research Center*, 1991.
19. Bonfiglioli A., Paciorri R., Hypersonic Flow Computations on Unstructured Grids: Shock-Capturing vs. Shock-Fitting Approach, *40th Fluid Dynamics Conference and Exhibit*, AIAA 2010-4449, 2010.
20. Isaev S.A., Baranov P.A., Gortyshov Yu.Ph., Guvernyuk S.V., Mazo A.B., Smurov M.Yu., Sudakov A.G., Usachov A.E., Kharchenko V.B., *Aerodynamics of thickened bodies with vortex cells. Numerical and physical modeling*, Saint Petersburg, Politekhnikeskii universitet, 2016, 215 p.
21. Gnoffo P., White J., Computational Aerothermodynamic Simulation Issues on Unstructured Grids, *37th AIAA Thermophysics Conference*, AIAA Paper 2004-2371. <https://doi.org/10.2514/6.2004-2371>
22. Tahmasbi V., Karimian S., A New Algorithm for Shock Sensor Calculation at Supersonic Speeds on a 3D-Unstructured Grid, *J. Aerosp. Technol. Manag.*, 2016, vol.8, no. 4, pp.441–450.
23. Mavriplis D.J., Unstructured-Mesh Discretizations and Solvers for Computational Aerodynamics, *AIAA Journal*, 2008, vol. 46, no. 6, pp. 1281–1298.
24. Bonfiglioli A., Paciorri R., Comparative Study of Stagnation Point Anomalies by Means of Shock Capturing and Shock Fitting Unstructured Codes, *Sixth European Symposium on Aerothermodynamics for Space Vehicles*, 2009.

25. Mazaheri A.R., Kleb B., Exploring Hypersonic. Unstructured-Grid Issues through Structured Grids, AIAA Paper 2007-4462, 2007.
26. Voronich I.V., Smirnova N.S., Titarev V.A., Algorithm for Mesh Adaptation to a Flow Field with a Bow Shock Wave, *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2024, vol. 64, pp. 2111–2120.
27. Peter J., Nguyen-Dinh M., Trontin P., Goal oriented mesh adaptation using total derivative of aerodynamic functions with respect to mesh coordinates – With applications to Euler flows, *Computers & Fluids*, 2012, vol. 66, pp. 194–214.
28. Peraire J., Peiró J., Morgan K., Hassan O., The computation of aerodynamic flows using unstructured meshes, *The finite element method in the 1990's*, Heidelberg, Springer Berlin, 1992, pp. 452–464.
29. Edwards J.E.H., Adaptive Quadrilateral and Triangular Finite-Element Scheme for Compressible Flows, *AIAA Journal*, 1990, vol. 28, no. 1, pp. 51–59.
30. Schwing A.M., Nompelis I., Candler G.V., Implementation of Adaptive Mesh Refinement in an Implicit Unstructured Finite-Volume Flow Solver, *21st AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, 2013.
31. Nguyen-Dinh M., Peter J., Sauvage R., Meaux M., Desideri J.-A., Mesh quality assessment based on aerodynamic functional output total derivatives, *European Journal of Mechanics B/Fluids*, 2013.
32. Kotov D.V., Surzhikov S.T., Computations of viscous and nonviscous gas flows on unstructured grids using AUSM, *Computational continuum mechanics*, 2011, vol. 4, no. 1, pp. 36–54. [in Russian] <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2011.4.1.4>
33. Kotov D.V., Surzhikov S.T., Calculation of hypersonic flow of reacting gas in scramjet combustor by finite volume method using AUSM, *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, 2011, vol. 11. [in Russian] <http://chemphys.ipmnet.ru/issues/2011-11/articles/174/>
34. Surzhikov S.T., Ponomarev E.P., *Finite volume method for solving problems of continuum mechanics and radiative heat transfer*, Preprint No. 645, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, 1999, 24 p. [in Russian]
35. Sakovich V.S., Sorokin A.M., Application of unstructured grids for computing a viscous flow around multi-element airfoils, *Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki*, 1997, vol. 37, no. 10, pp. 1269–1280 [in Russian].
36. Godunov S. K., *Numerical Solution of Multidimensional Problems in Gas Dynamics*, Moscow, Nauka, 1976, 400 p. [in Russian].
37. Godunov S.K., A finite difference method for the computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics, *Sbornik: Mathematics*, 1959, vol. 47, no. 8–9, pp. 357–393. [in Russian].
38. Zheleznyakova A.L., An efficiency analysis of modern numerical schemes for solving the problem of the decay of an arbitrary discontinuity within the framework of the method of splitting by physical processes for the computations of hypersonic flows, *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, 2014, vol. 15, no. 5. [in Russian] <http://chemphys.ipmnet.ru/issues/2014-15-5/articles/255/>
39. Harten A., Lax P., van Leer B., On upstream differencing and Godunov type methods for hyperbolic conservation laws, *SIAM review*, 1983, vol. 25, pp. 35–61.
40. Toro E.F., Spruce M., Speares W., Restoration of the contact surface in the HLL Riemann solver, *J. Shock Waves*, 1994, vol. 4, pp. 25–34.
41. Toro B.F., Chakraborty A., Development of an approximate Riemann solver for the steady supersonic Euler equations, *The Aeronautical Journal*, 1994, vol. 98, pp. 325–339.
42. Rusanov V.V., The calculation of the interaction of non-stationary shock waves with barriers, *Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki*, 1961, vol. 1, no. 2, pp. 267–279. [in Russian]
43. Roe P.L., Approximate Riemann solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes, *J. Comput. Phys.*, 1981, vol. 43, pp. 357–372.
44. Engquist B., Osher S., One-sided difference approximations for nonlinear conservation laws, *Math. Comp.*, 1981, vol. 36, no. 154, pp. 321–351.

45. Osher S., Solomon F., Upwind difference schemes for hyperbolic systems of conservation laws, *Math. Comp.*, 1982, vol. 38, no. 158, pp. 339–374.
46. Osher S., Chakravarthy S.R., Upwind schemes and boundary conditions with applications to Euler equations in general geometries, *J. Comput. Phys.*, 1983, vol. 50, pp. 447–481.
47. Steger J.L., Warming R.F., Flux vector splitting of the inviscid gasdynamic equations with application to finite-difference methods, *J. Comput. Phys.*, 1981, vol. 40, pp. 263–293.
48. van Leer. B., Flux–Vector Splitting for the Euler Equations, ICASE Report 82–30, 1982.
49. van Leer. B., Flux Vector Splitting for the Euler Equations, *Proc. 8th International Conference on Numerical Methods in Fluids Dynamics*, 1982, pp. 507–512.
50. Liou M.S., Steffen C.J., A new flux splitting scheme, *Journal of Computational physics*, 1993, vol. 107, no. 1, pp. 23–39.
51. Liou M.S., A Sequel to AUSM: AUSM+, *Journal of Computational Physics*, 1996, pp. 364–382.
52. Wada Y., Liou M.S., An accurate and robust flux splitting scheme for shock and contact discontinuities, *SIAM J. Scientific Computing*, 1997, pp. 633–657.
53. Liou M.S., Recent progress and applications of AUSM+, *Sixteenth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics*, 1998, vol. 515, pp. 302–307.
54. Liou M.S., A Sequel to AUSM, Part II: AUSM+–up, *Journal of Computational Physics*, 2006, pp. 137–170.
55. Kim K.H., Lee J.H., Rho O.H., An improvement of AUSM schemes by introducing the pressure-based weight functions, *Computers & fluids*, 1998, vol. 27, no. 3, pp. 311–346.
56. Kim K.H., Kim C., Rho O.H., Methods for the Accurate Computations of Hypersonic Flows I. AUSMPW+ Scheme, *Journal of Computational Physics*, 2001, vol. 174, no. 1, pp. 38–80.
57. Chang C.H., Liou M.S., A New approach to the simulation of compressible multifluid flows with AUSM+ scheme, *16th AIAA CFD Conference*, AIAA Paper 2003-4107, 2003.
58. Edwards J.R., Franklin R., Liou M.S., Low-Diffusion Flux-Splitting Methods for Real Fluid Flows with Phase Transitions, *AIAA Journal*, 2000, vol. 38, no. 9, pp. 1624–1633.
59. Edwards J.R., Liou M.S., Low-diffusion flux-splitting methods for flows at all speeds, *AIAA Journal*, 1998, vol. 36, no. 9, pp. 1610–1617.
60. Yatsukhno D.S., Application of the finite volume method for the standard ballistic model aerodynamics calculations, *Journal of Physics: Conference Series*, 2019, vol. 1250, no.1. Art. 012011.
61. Peery K.M., Imlay S.T., Blunt Body Flow Simulations, AIAA Paper 88-2924, 1988.
62. Liou M.S., Ten Years in the Making: AUSM-Family, AIAA Paper 2001-2521, 2001.
63. Liou M.S., Wada Y., A Flux Splitting Scheme with High-Resolution and Robustness for Discontinuities, AIAA Paper 94-0083, 1994.
64. Billet G., Louedin O., Adaptive limiters for improving the accuracy of the MUSCL approach for unsteady flows, *Journal of Computational Physics*, 2001, vol. 170, no. 1, pp. 161–183.
65. Shima E., Kitamura K., Parameter-free simple low-dissipation AUSM-family scheme for all speeds, AIAA Paper 1693-1709, 2011.
66. Kitamura K., Shima E., A new pressure flux for AUSM-family schemes for hypersonic heating computations, *20th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, 2011, pp. 3056.
67. Kitamura K., Shima E., Towards shock-stable and accurate hypersonic heating computations: A new pressure flux for AUSM-family schemes, *Journal of Computational Physics*, 2013, vol. 245, pp. 62–83.
68. Kitamura K., Liou M.S., Chang C.H., Extension and Comparative Study of AUSM-Family Schemes for Compressible Multiphase Flow, *Communications in Computational Physics*, 2014, vol. 16, no. 3, pp. 632–674.
69. Kitamura K., Assessment of SLAU2 and other flux functions with slope limiters in hypersonic shock-interaction heating, *Computers & Fluids*, 2016, vol. 129, pp. 134–145.

70. Chen S., Cai F., Xue H., Wang N., Yan C., An improved AUSM-family scheme with robustness and accuracy for all Mach number flows, *Applied Mathematical Modelling*, 2019.
71. Singh R., Holmes G., Evaluation of an artificial dissipation and AUSM based flux formulation: AD-AUSM, AIAA Paper 2000-3069, 2012.
72. Chen S.-S., Yan C., Zhong K., Xue H.-C., Li, E.-L., A novel flux splitting scheme with robustness and low dissipation for hypersonic heating prediction, *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, 2018, vol. 127, pp. 126–137.
73. Kitamura K., *Advancement of Shock Capturing Computational Fluid Dynamics Methods: Numerical Flux Functions in Finite Volume Method*, Singapore, Springer Nature, 2020, 142 p.
74. Sod G.A., A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws, *Journal of Computational Physics*, 1978, vol. 27, pp. 1–31.
75. Lax P.D., Liu X.D., Solution of two-dimensional Riemann problems of gas dynamics by positive schemes, *SIAM Journal on Scientific Computing*, 1998, vol. 19, pp. 319–340.
76. Zheleznyakova A.L., Surzhikov S.T., Application of the method of splitting by physical processes for the computation of a hypersonic flow over an aircraft model of complex configuration, *High Temp*, 2013, vol. 51, pp. 816–829.
77. Belotserkovskii O.M., Davydov Yu.M., *Method of Large Particles in Gas Dynamics*, Moscow, Nauka, 1982, 391 p. [in Russian]
78. Kryukov I.A., Ivanov I.E., Larina E.V., Verification of the hysol software package for calculating high-speed flows, *Materialy XX Yubilejnoj mezhdunarodnoj konferencii po vychislitelnoj mekhanike I sovremennym prikladnym programmnyim sistemam (VMSPPS 2017)*, Moscow, Izdatelstvo MAI-Print, 2017. [in Russian]
79. Silvestrov P.V., Determination of the aerodynamic characteristics of advanced aircraft using a set of proprietary computer codes, Cand. phys.-math. sci. diss., Moscow, IPMech RAS, 2021, 257 p. [in Russian]
80. Koryukov I. A., Numerical modeling of shock-wave interactions in high-speed gas flows, Cand. phys.-math. sci. diss., Moscow, IPMech RAS, 2026, 146 p. [in Russian]
81. Ishin D.V. Numerical modeling of shock waves interference interaction near a plate with cylindrical bluntness, *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, 2026, vol. 27, no. 3 [in Russian]. <http://chem-phys.ipmnet.ru/issues/2026-27-3/articles/1281/>

Статья поступила в редакцию 25 августа 2026 г.