

Longitudinal Expansion of Two Spheres in Supersonic Flow

F. A. Maksimov¹, P. A. Ponomareva^{1,2}

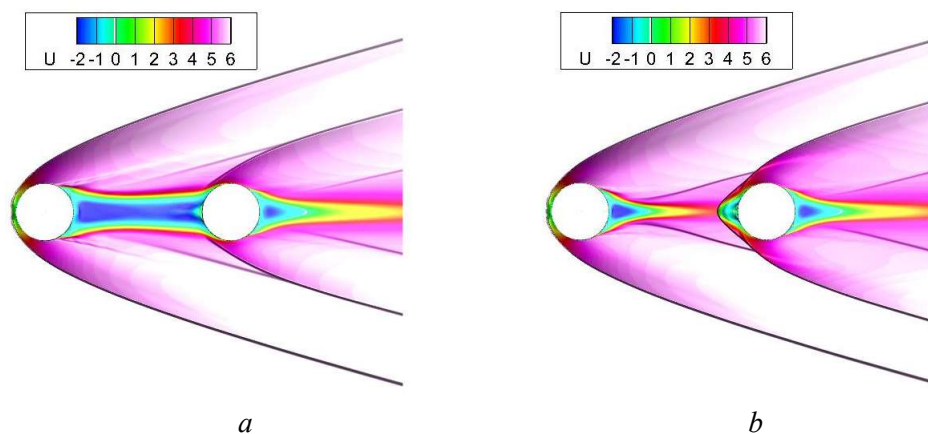
¹*Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University,
Moscow, 119192, Russia
f_a_maximov@mail.ru*

²*Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University,
Moscow, 119991, Russia
polashka34538@mail.ru*

Abstract

The results of calculations for flow around two spheres located along the flow are presented. The results of experimental studies of the aerodynamic characteristics of a system of two bodies located along the flow are known. One interesting phenomenon in this problem is the hysteresis of the characteristics as the distance between the bodies changes. A multi-block computational technology is applied using local curved grids adapted to the surface of the bodies, which have finite overlap regions with a global rectangular grid for the entire computational domain. Viscous boundary layers are resolved on local grids using the Navier-Stokes equations, and the effects of aerodynamic interference of accompanying shock wave structures are described using the Euler equations. In the grid overlap regions, interpolation of functions is applied up to the transition boundaries from one grid to the other. With successive displacement of one of the spheres with an increase or decrease in the distance between the spheres, a qualitative restructuring of the flow structure is observed. The implemented flow pattern depends not only on the distance between the spheres but also on the flow regime the system was in before the distance changed. The feasibility of numerically modeling the hysteresis of the aerodynamic properties of a system of two spheres as a function of the distance between them is demonstrated. The results are compared with known experimental data. A model of the relative longitudinal motion of two bodies is presented. The resulting estimate of the aerodynamic drag of the two bodies allows us to evaluate the nature of the bodies' relative motion.

Keywords: separation of a system of two spheres, aerodynamic characteristics, shock wave structures, hysteresis.



Flow with (a) and without (b) a separation zone between bodies

УДК533.6.011.5: 533.6.011.72:519.634

Продольный разлет двух сфер при сверхзвуковом обтекании

Ф.А. Максимов¹, П.А. Пономарева^{1,2}

¹НИИ Механики МГУ им. М.В. Ломоносова,
Россия, Москва, 119192, Мичуринский проспект, д.1

²Механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова,
Россия, Москва, 119991, Ленинские горы, д. 1,
f_a_maximov@mail.ru, polashka34538@mail.ru

Аннотация

Представлены результаты расчетов обтекания двух сфер, расположенных вдоль потока. Известны результаты экспериментальных исследований аэродинамических характеристик системы двух тел, расположенных вдоль потока. Одним из интересных явлений в данной задаче является гистерезис характеристик при изменении расстояния между телами. Применена многоблочная вычислительная технология с использованием локальных адаптированных к поверхности тел криволинейных сеток, имеющих конечные области перекрытия с глобальной прямоугольной сеткой для всей расчетной области. Вязкие пограничные слои разрешаются на локальных сетках с использованием уравнений Навье – Стокса, а эффекты аэродинамической интерференции сопутствующих ударно-волновых структур описываются в рамках уравнений Эйлера. В областях перекрытия сеток применяется интерполяция функций до границ перехода от одной сетки к другой. При последовательном смещении одной из сфер с увеличением или уменьшением расстояния между сферами наблюдается качественная перестройка структуры течения. Реализуемая схема обтекания зависит не только от величины расстояния между сферами, но и от режима обтекания, в котором система находилась до изменения расстояния. Показана возможность численного моделирования гистерезиса аэродинамических свойств системы двух сфер в зависимости от расстояния между ними. Результаты сопоставляются с известными экспериментальными данными. Представлена модель относительного продольного движения двух тел. Полученная оценка аэродинамического сопротивления двух тел позволяет дать оценку характера относительного движения тел.

Ключевые слова: разлет системы из двух сфер, аэродинамические характеристики, гистерезис.

1. Введение

Для расчета динамики продольного разлета двух тел необходима оценка аэродинамического сопротивления каждого из тел, второе из которых находится в следе за первым. Из экспериментальных исследований известно, что при симметричном обтекании системы двух тел в зависимости от расстояния между ними реализуется одна из двух схем течения [1–6]: при малом расстоянии - отрывная схема течения, когда поток отрывается от переднего тела и присоединяется к заднему; при большем расстоянии – отрывная зона в донной области за передним телом с головным скачком уплотнения перед задним телом. Перестройка течения (переход от одной схемы течения к другой) приводит к резкому изменению картины обтекания пары тел и оказывает значительное влияние на аэродинамическое сопротивление каждого из тел и системы тел в целом. Критическое расстояние, при котором происходит перестройка схемы течения, зависит не только от параметров задачи (геометрии, параметров

потока), но и от направления изменения расстояния между телами – от движения с увеличением или уменьшением расстояния между телами.

Интерес к задаче об обтекании системы двух тел в [1–6] обусловлен проблемами создания парашютных систем, для решения которых выполнены многочисленные экспериментальные исследования. В настоящее время интерес к задачам о сверхзвуковом обтекании системы тел, кроме разнообразных технических приложений, обусловлен изучением газодинамических особенностей течений, которые возникают при разлете частей метеоритного тела после его разрушения. В работах [7–13] как экспериментально, так и с помощью методов вычислительной аэродинамики, рассматриваются задачи разлета двух тел как одинаковой формы и размера, так и при различных сочетаниях геометрических форм и их размеров. Одной из задач, заслуживающей отдельного внимания, является динамика разлета двух тел, расположенных друг за другом вдоль направления полета. Так же, как и в случае системы "груз - парашют", в этом случае будет реализовываться гистерезис аэродинамических свойств в зависимости от расстояния между телами.

Качественно задача об обтекании системы двух тел, расположенных вдоль направления потока, хорошо согласуется с задачей об обтекании кольцевой каверны на осесимметричном теле. В [14–17] приведены экспериментальные и численные исследования при изменении длины каверны, показано наличие области неоднозначных режимов. Режим течения в области неоднозначности зависит от истории обтекания, т.е. имеет место гистерезис.

В данной работе выполнены расчеты осесимметричного обтекания пары тел при изменении расстояния между ними. При проведении расчетов с изменением расстояния между телами в качестве начальных данных использовалось решение, полученное ранее с близким значением расстояния, что фактически определяло первоначальную схему обтекания. Заданная схема обтекания в процессе установления могла либо сохраняться, либо разрушалась с образованием другой схемы обтекания. В последнем случае определяется критическое значение расстояния, при котором происходит перестройка схемы обтекания. Проведение расчетов с увеличением, а затем с уменьшением расстояния между телами позволяет определить область гистерезиса, когда характеристики имеют неоднозначное значение. Выявление области гистерезиса и физических причин этого явления имеют большое значение для однозначного определения аэродинамических свойств.

2. Метод численного моделирования и постановка задачи

В работе [18] реализован метод моделирования обтекания набора тел. Метод основан на многосеточной технологии. Для всей расчетной области течения строится регулярная сетка с прямоугольными ячейками. Данная сетка не связана с обтекаемыми телами, более того так как она равномерная и описать на ней развитие тонких вязких слоев не представляется возможным, то на данной сетке решаются уравнения Эйлера. На данную сетку накладывается набор криволинейных сеток, связанных с поверхностью обтекаемых тел. При построении сеток около тел, каждая из которых строится только в небольшой окрестности около поверхности тела, узлы около поверхности сгущаются для возможности описания вязкого пограничного слоя. На данной сетке решаются уравнения Навье – Стокса в приближении тонкого слоя. Граничные условия на внешней границе для сеток около обтекаемых тел определяются из решения на внешней сетке. В свою очередь, значения газодинамических функций в узлах внешней прямоугольной сетки, которые попадают во внутреннюю область сеток около тел, после каждого шага интегрирования по времени также пересчитываются. Изначально не предполагается, что какие-либо узлы могут совпадать и пересчет газодинамических функций с одной сетки на другую производится с помощью интерполяции.

Нестационарные уравнения Навье – Стокса в приближении тонкого слоя для осесимметричного течения сжимаемого газа в безразмерной форме в криволинейной системе координат $\xi = \xi(x, y)$; $\eta = \eta(x, y)$ имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \frac{yU}{J} + \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\xi_x y E + \xi_y y F}{J} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\eta_x y E + \eta_y y F}{J} = \frac{H}{J} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{yS}{J}$$

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{pmatrix}; \quad E = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (e + p)u \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (e + p)v \end{pmatrix}; \quad H = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \\ 0 \end{pmatrix}; \quad S = \frac{\mu}{Re} \begin{pmatrix} 0 \\ m_1 u_\eta + m_2 \eta_x \\ m_1 v_\eta + m_2 \eta_y \\ m_3 \end{pmatrix},$$

где $m_1 = \eta_x^2 + \eta_y^2$; $m_2 = \frac{1}{3}[\eta_x u_\eta + \eta_y v_\eta]$; $m_3 = m_1 \left[\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{1}{Pr} T_\eta + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{u^2 + v^2}{2} \right) \right] + m_2 [\eta_x u + \eta_y v]$.
Здесь t – время; ρ – плотность; (u, v) – составляющие вектора скорости $\mathbf{V}$ соответственно в направлениях (x, y) . Ось x симметрии течения направлена вдоль вектора скорости набегающего потока, y – расстояние от оси симметрии. p – давление; e – полная энергия единицы объема газа, которая для совершенного газа $e = \rho \left(\varepsilon + \frac{u^2 + v^2}{2} \right)$, где $\varepsilon = \frac{1}{\gamma-1} \frac{p}{\rho}$ – внутренняя энергия газа; γ – показатель адиабаты.

Безразмерные переменные определены через размерные, которые обозначены штрихом «'», следующим образом:

$$t = \sqrt{\frac{p'_0}{\rho'_0}} \frac{t'}{L'}; \quad \mathbf{X} = \frac{\mathbf{X}'}{L'}; \quad \mathbf{V} = \sqrt{\frac{\rho'_0}{p'_0}} \mathbf{V}'; \quad \rho = \frac{\rho'}{\rho'_0}; \quad p = \frac{p'}{p'_0}; \quad T = \frac{T'}{T'_0}; \quad \mu = \frac{\mu'}{\mu'_0}$$

Нижний индекс «0» означает значение параметра в невозмущенном потоке; L' – характерный размер; $\mathbf{X} = (x, y)$; $\mathbf{V} = (u, v)$.

Предполагается, что число Прандтля $Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda}$ постоянно. Здесь c_p – коэффициент теплоемкости; λ – коэффициент теплопроводности; μ – коэффициент вязкости. $Re = \frac{(\sqrt{p'_0 \rho'_0} L')}{\mu'_0}$ – число Рейнольдса. Систему дифференциальных уравнений дополняет уравнение состояния: $p = \rho R T$, где T – температура, R – газовая постоянная. В безразмерном виде уравнение состояния $p = \rho T$.

Коэффициенты матрицы и J якобиан преобразования, вычисляются по следующим формулам:

$$\xi_x = J y_\eta; \quad \xi_y = -J x_\eta; \quad \eta_x = -J y_\xi; \quad \eta_y = J x_\xi, \quad J = (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)^{-1}$$

Использование обобщенного преобразования позволяет построить равномерную сетку в виде единичного квадрата. Коэффициенты матрицы преобразования при заданном распределении узлов в физической области вычисляются с использованием центральных разностей. При выводе приведенной системы уравнений предполагается, что координатные линии $\xi = \text{const}$ ориентированы по нормали к поверхности тела, и производные по направлению η фактически соответствуют производным вдоль локальных нормалей к поверхности тела. Это обеспечивает, что при вычислении диссипативного члена учитываются вторые производные по нормали к поверхности тела.

Рассматривается осесимметричное обтекание равномерным сверхзвуковым потоком газа системы из двух тел, расположенным вдоль оси симметрии. На рис. 1 изображен фрагмент внешней прямоугольной расчетной области с двумя сферами, помещенными внутри расчетной области.

Прямоугольная сетка имеет размерность от 701 до 1401 узлов по координате X (изменяется при увеличении расстояния между телами) и 501 по координате Y . Размерность сетки около каждого из тел – 181 узел вдоль контура тела и 41 узел по нормали. Внешняя граница расположена на расстоянии 0.05 радиуса сферы от поверхности тела.

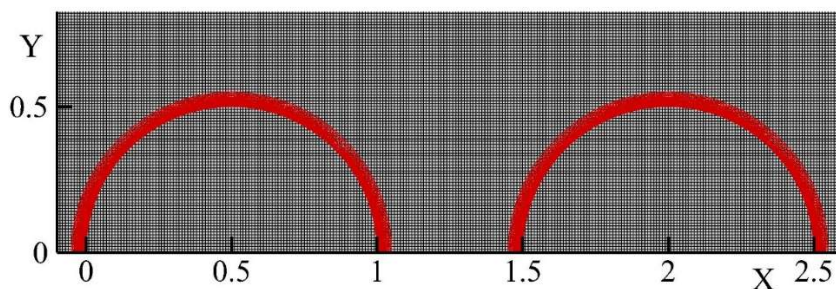
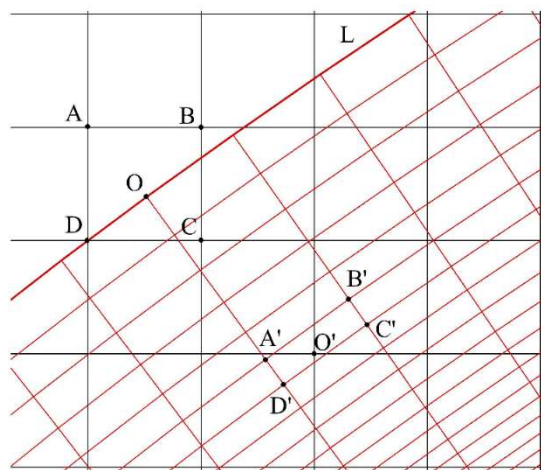


Рис. 1. Фрагмент расчетной сетки около системы двух сфер

При сверхзвуковом обтекании на входной "левой" границе задаются условия в набегающем потоке, на оси симметрии $Y = 0$ – условия симметрии течения, на "правой" границе – мягкие граничные условия с равенством нулю производных газодинамических параметров вдоль направления потока. Предполагается, что верхняя граница расположена достаточно далеко. На поверхности обтекаемых тел ставятся условия прилипания, а на внешней границе сетки около обтекаемых тел параметры течения определяются через параметры на внешней сетке. Две границы расчетной области расположены на оси симметрии, соответственно на этих границах ставятся условия симметрии течения.

Для того, чтобы решения на внешней сетке и сетке около тела связать в единое целое, после выполнения шага интегрирования значения газодинамических функций на внешней границе L сетки около тела (рис. 2) путем интерполяции определяются из решения, получаемого на внешней сетке. Так как используется двухшаговая разностная схема [18], то аналогичная процедура выполняется и для соседнего с границей L слоя узлов. В то же время решение во всех узлах внешней сетки, попадающих внутрь области определения решения сетки около тела, заменяется решением, получаемым на данной сетке.

Рис. 2. Расчетные сетки около внешней границы L и интерполяция с одной сетки на другую

При пересчете значений газодинамических функций с одной сетки на другую используется интерполяция. В рассматриваемом двумерном случае интерполяция реализована в следующем виде. Вначале определяется ячейка $ABCD$, в которой расположена точка O (рис. 2). Значения функций в точке O определяются через значения функций в узлах A , B , C и D . Значение функции f в узле O можно определить через ее значения в любых трех узлах, для определенности, пусть это узлы B , A , D , по интерполяционной формуле

$$f_O = f_A + \alpha \cdot (f_B - f_A) + \beta \cdot (f_D - f_A), \text{ где } \alpha = \frac{|AO \times AB|}{|AD \times AB|}, \beta = \frac{|AO \times AD|}{|AB \times AD|}$$

Для того чтобы учесть значение функции в узле С, можно аналогично выразить f_0 через ее значения в точках другой тройки узлов, например, D, С и В. Окончательное выражение для f_0 берется как среднее арифметическое величин по четырем вариантам выбора угловой точки. Коэффициенты интерполяции определяются для всех узлов на контуре L и соседнем к нему. Для узлов равномерной сетки, попадающих внутрь области определения решения сеток около тел, – например точка O' в ячейке $A'B'C'D'$ (рис. 2) – проводится аналогичная процедура и определяются соответствующие коэффициенты интерполяции.

Решение получается методом установления. Используется известная разностная схема МакКормака – явная схема второго порядка аппроксимации. В [18–20] приведены примеры использования данной схемы при решении задач внешнего обтекания по многоблочной технологии. Особенностью расчетов по многоблочной технологии является интегрирование с общим шагом по времени на внешней расчетной сетке, т.е. выбирается минимальный шаг интегрирования по времени из условия устойчивости по всей области расчета. Это не является существенным ограничением, так как сетка равномерная. А при интегрировании на сетках около тел используется локальный шаг по времени, т.е. в каждом узле расчетной сетки шаг по времени выбирается из местных условий. Это обеспечивает более быстрое распространение возмущений при использовании неравномерной сетки, а, следовательно, и установление.

Определяющими безразмерными параметрами задачи являются: число Маха M набегающего потока, число Рейнольдса Re , показатель адиабаты γ . Все расчеты выполнены при числах Маха $M = 5$, $Re = 10^5$ и $\gamma = 1.4$. Течение предполагается ламинарным. Выбор значения числа Маха был обусловлен тем, что многие экспериментальные исследования в [1–6] проводились при данном числе Маха. Экспериментальные исследования [1–6] проводились при числах Рейнольдса, соответствующих как ламинарному, так и турбулентному обтеканию. Установлено, что как для прямой, так и для обратной перестройки течения при чисто ламинарной или турбулентной зонах смешения число Рейнольдса оказывает слабое влияние на критические расстояния перестройки течения. В работе используется ламинарная модель вязкости, которая обеспечивает образование пограничного слоя на поверхности тел, что достаточно для формирования адекватной структуры течения в донной области тел, и вместе с тем нет необходимости усложнения математической модели для учета турбулентности.

Расчеты проводились при различных значениях диаметра второй сферы d и различных расстояниях X между сферами. Численные решения строятся методом установления при фиксированном расстоянии между сферами. Критерием установления является выход на стационарное решение.

В качестве начальных данных может использоваться течение с параметрами во всех узлах, соответствующих параметрам в набегающем потоке. Для учета эффекта влияния начального поля течения используется тактика постепенного смещения второго тела по оси X . После установления решения при фиксированном значении X , второе тело смещается на малое расстояние ΔX и запускается новый процесс установления с текущего мгновенного состояния газодинамического поля для предыдущего шага по X .

Визуализация расчетных полей течения представлена распределением продольной скорости с помощью цветовой палитры. При этом зона возвратного течения выделяется синим цветом. Кроме того, затемнением выделяются области с большим значением модуля градиента плотности, что позволяет визуализировать ударные волны и контактные разрывы.

3. Результаты расчетов при различных числах Маха

В качестве примера приведем результаты расчета, когда диаметры двух сфер одинаковые $d = 1$ (d – отношение диаметра второй сферы к диаметру первой сферы). В качестве параметра, характеризующего расстояние между сферами согласно [1, 6], введем X –

отношение расстояния от передней точки первой сферы до миделевого сечения второй сферы к диаметру первой сферы.

Если первоначально разместить две сферы достаточно близко, то между ними образуется отрывная зона. На рис. 3 приведены результаты расчета при $X = 2.5$.

В первой серии расчеты выполняются с увеличением X , т.е. первоначально решение получается при малом X , а затем второе тело смещается вниз по потоку. Характер течения с образованием отрывной зоны между телами сохраняется в некотором диапазоне расстояния между телами. Однако, при достаточно большом значении X течение с отрывной зоной между сферами становится неустойчивым, и структура течения качественно изменяется. Изменение структуры течения происходит резким скачком, и точка перехода определяется с точностью до шага перемещения второго тела ΔX . На рис. 4 приведено течение при $X = 4.5$. Отрывная зона между сферами разрывается – с образованием обычной зоны отрыва в донной области за первой сферой. Фактически в этом случае имеется изолированное обтекание первой сферы, а вторая сфера находится в следе. Такой же результат получается в расчете, если в качестве начальных условий использовать условия в набегающем потоке.

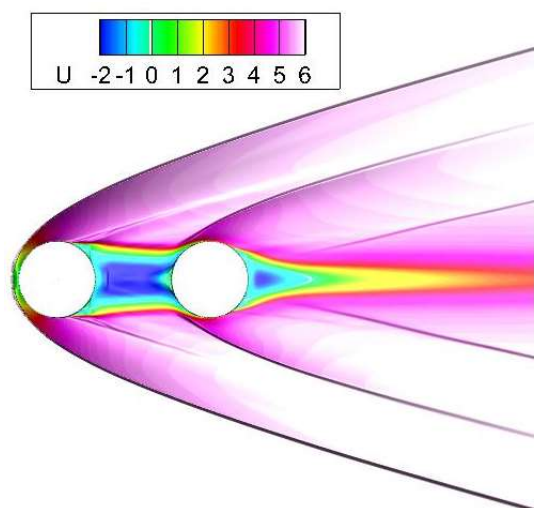


Рис. 3. Течение с отрывной зоной между телами, $X = 2.5$

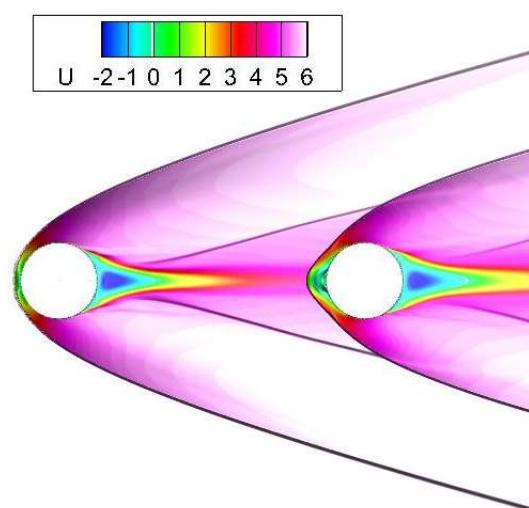


Рис. 4. Течение без общей отрывной зоны, $X = 4.5$

Точка качественного изменения структуры течения при увеличении расстояния между телами дает первую (или правую) критическую точку X_1 . При $X > X_1$ первое тело обтекается независимо от второго тела в любом случае.

Если при достаточно большом начальном расстоянии между телами ($X_0 > X_1$) уменьшать расстояние между телами, то схема течения, представленная на рис. 4, будет сохраняться до второго критического значения X_2 . При $X < X_2$ структура течения перестраивается с образованием общей зоны отрыва между телами. Значение X_1 обусловлено неустойчивостью отрывной зоны между телами, а значение X_2 связано со взаимодействием ударной волны перед телом в следе с отрывной зоной за первым телом. Так как физические причины изменения структуры течения разные, то в общем случае значения X_1 и X_2 не совпадают. Фактически в некотором диапазоне параметра X возможны две схемы течения. Это будет приводить к различным аэродинамическим свойствам системы двух тел при одном значении X . Фактически, в этом случае есть гистерезис аэродинамических свойств.

На рис. 5 приведены коэффициент сопротивления C_x первой (1) и второй (2) сфер. В качестве характерной площади – площадь миделя соответствующего тела. Синим цветом выделены точки, которые получаются при расчетах с увеличением расстояния между телами, а голубым цветом – с уменьшением расстояния между телами.

Для каждой сферы фактически имеем два уровня сопротивления: нижняя линия соответствует режиму обтекания с отрывной зоной между телами и верхняя линия, соответствующая режиму обтекания с условно раздельным обтеканием тел. Образование отрывной области между телами приводит к росту давления в донной области за первой сферой, что и снижает ее сопротивление. А при обтекании второй сферы снижается уровень давления на наветренной стороне, уменьшается волновое сопротивление.

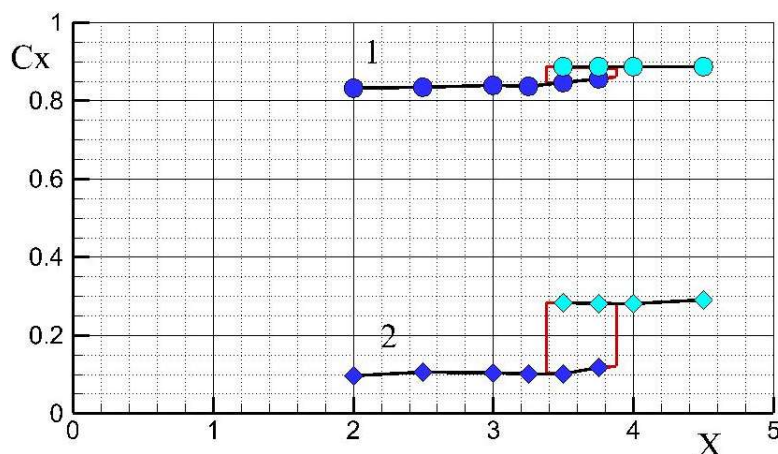


Рис. 5. Коэффициент сопротивления C_x сфер (1) и (2) в зависимости от X , $d = 1.0$

В данном случае $X_1 \approx 3.9$ и $X_2 \approx 3.4$. В области $3.4 < X < 3.9$ возможны оба режима течения. Реализуемый режим будет определяться фактически историей выхода в данные условия. На рис. 6 приведены две возможных картины течения при $X = 3.75$.

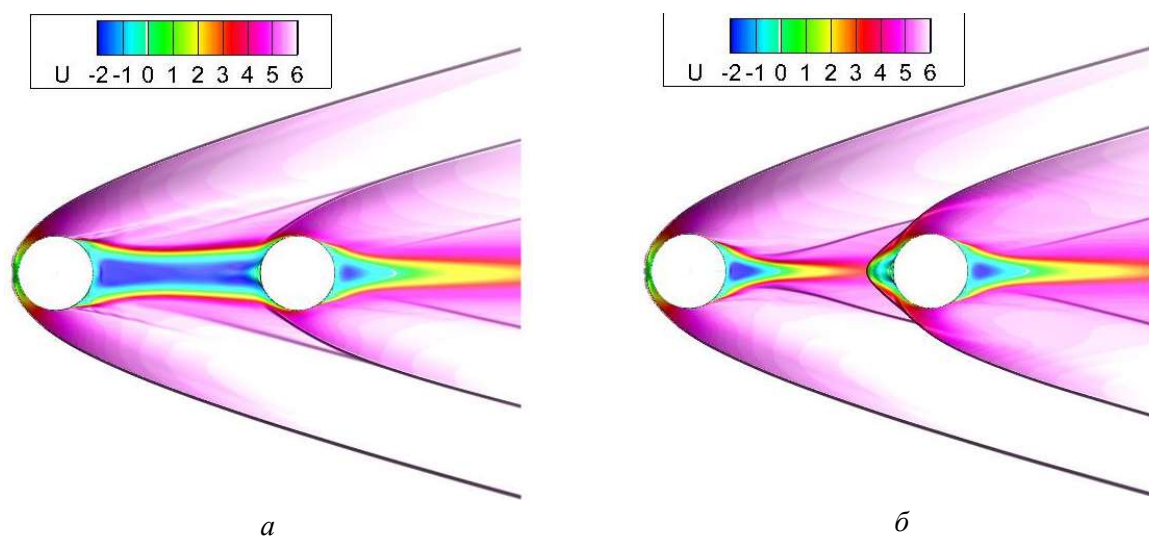


Рис. 6. Течение при $X = 3.75$ с (а) и без (б) отрывной зоны между телами ($d = 1.0$)

На рис. 7 и 8 представлен коэффициент сопротивления C_x в зависимости от X для случаев, когда вторая сфера имеет диаметр $d = 0.5$ и 0.7 . В качестве характерной площади в каждом случае используется собственная площадь миделя.

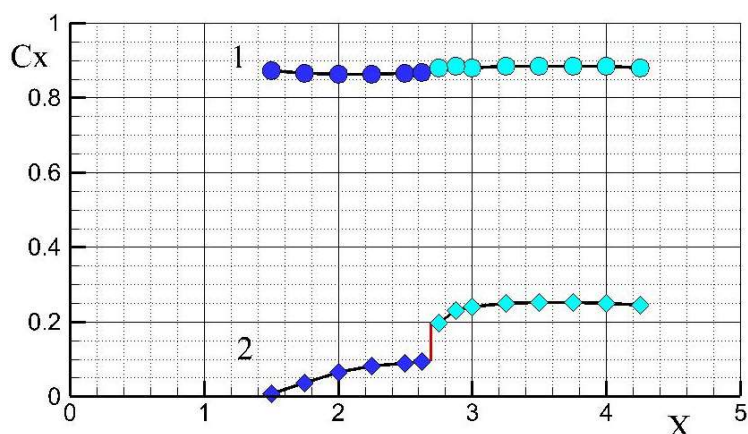


Рис. 7. Коэффициент сопротивления C_x сфер (1) и (2) в зависимости от X , $d = 0.5$

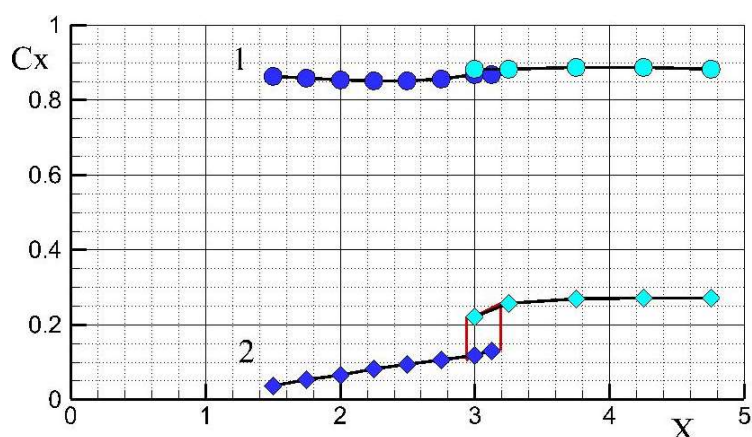


Рис. 8. Коэффициент сопротивления C_x сфер (1) и (2) в зависимости от X , $d = 0.7$

В случае $d = 0.5$ область гистерезиса не выявлена. С уменьшением d область гистерезиса сужается (см. рис. 5 ($d = 1.0$) и рис. 8 ($d = 0.7$)) и, возможно при $d = 0.5$ либо области гистерезиса совсем нет, либо область гистерезиса меньше заданного дискретного шага ΔX , с которым проводились расчеты.

При $d = 0.7$ в области $2.9 < X < 3.2$ возможны оба режима течения. На рис. 9 приведены две возможных картины течения при $X = 3.0$.

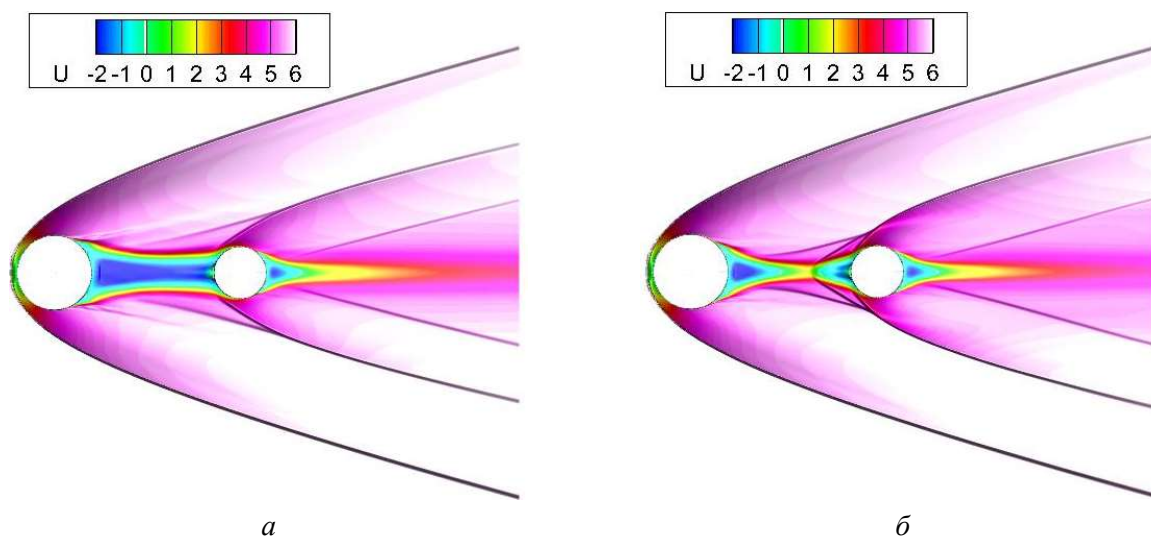


Рис. 9. Течение при $X = 3.0$ с (*a*) и без (*б*) отрывной зоны между телами ($d = 0.7$)

На рис. 10 и 11 представлен коэффициент сопротивления C_x в зависимости от X для случаев, когда вторая сфера имеет диаметр $d = 1.5$ и 2.0 .

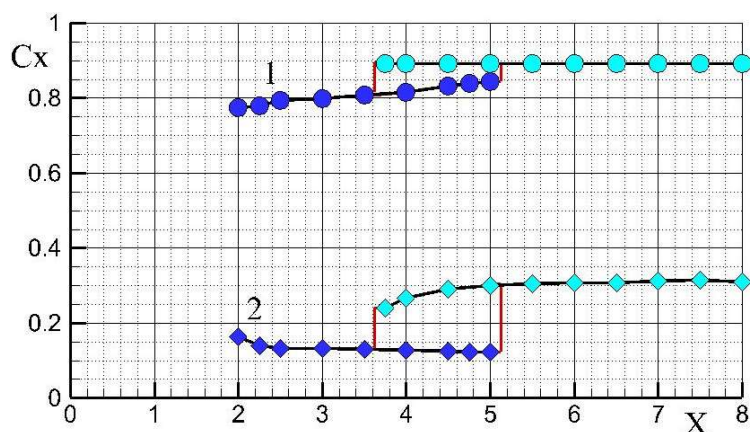


Рис. 10. Коэффициент сопротивления C_x сфер (1) и (2) в зависимости от X , $d = 1.5$

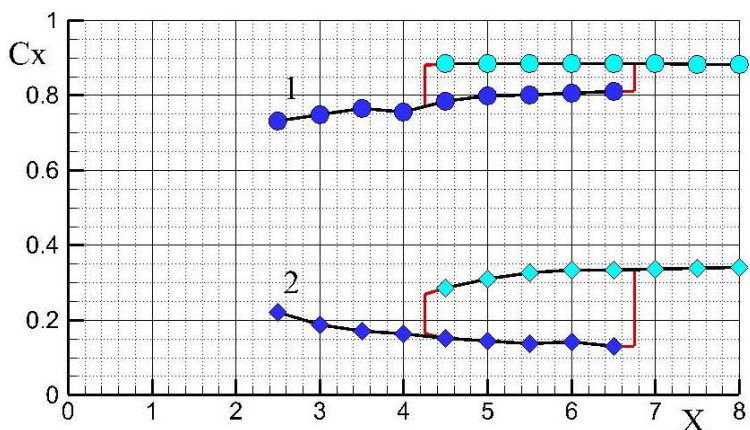
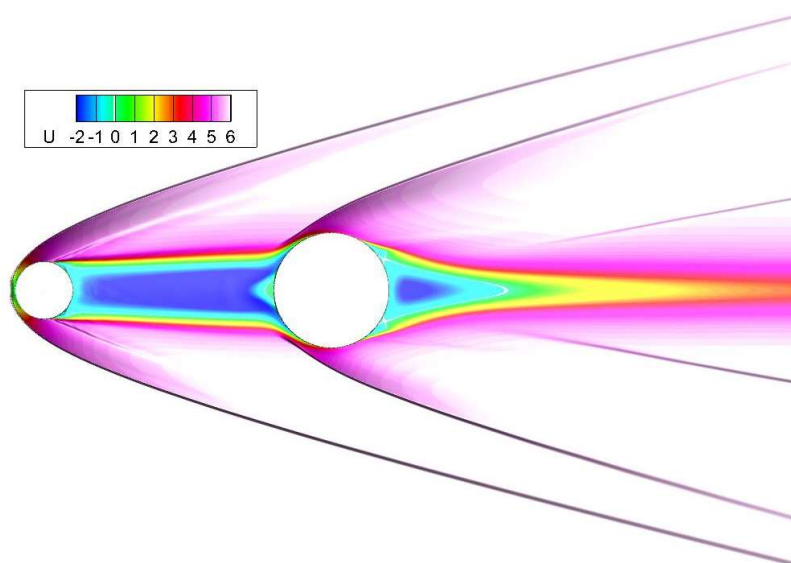


Рис. 11. Коэффициент сопротивления C_x сфер (1) и (2) в зависимости от X , $d = 2.0$

С увеличением d область гистерезиса расширяется. При $d = 1.5$ область неоднозначности решения находится в интервале $3.6 < X < 5.1$, при $d = 2.0$ – $4.2 < X < 6.8$.

На рис. 12 для случая $d = 2.0$ приведены две возможных картины течения при $X = 5.5$.



a

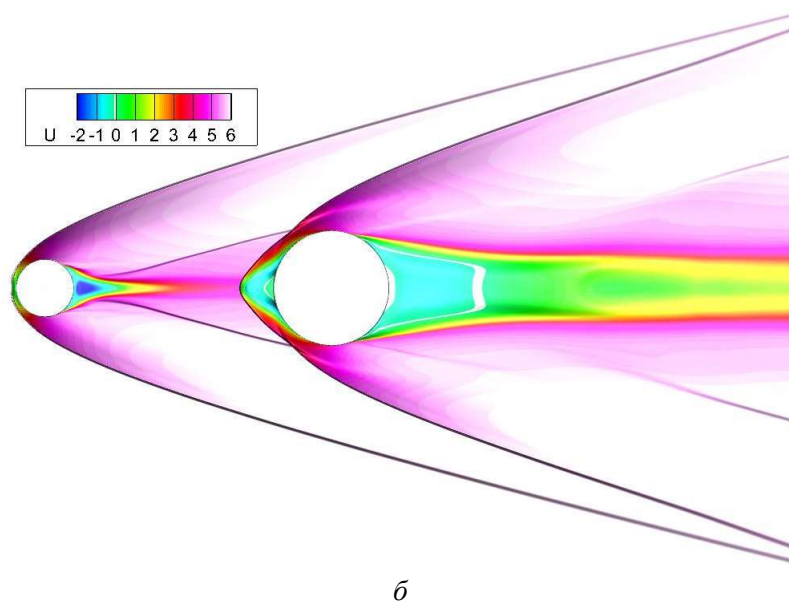


Рис. 12. Течение при $X=5.5$ с (а) и без (б) отрывной зоной между телами ($d = 2.0$)

По результатам экспериментальных исследований в [6] получена оценка положения правой точки. Согласно [6] значение X_1 определяется уравнением

$$X_1 = L = 1.495 + 2.618\lambda,$$

где $\lambda = 0.01\sqrt{M^4 \text{Re}_D} d$ – корреляционный параметр, который зависит от числа Маха M , числа Рейнольдса Re_D по диаметру первого тела, и d отношения диаметра второго тела к диаметру первого тела.

На рис. 13 приведено сопоставление экспериментального и расчетного положения правой точки области гистерезиса в зависимости от корреляционного параметра λ (эксперимент – линия, расчет – маркеры). Фактически, результаты экспериментов и выполненных расчетов очень хорошо согласуются.

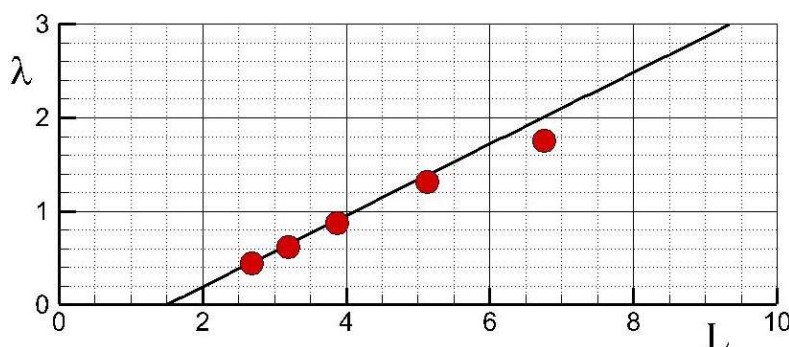


Рис. 13. Положение правой точки области гистерезиса

4. Модель динамики продольного разлета двух тел

Динамика полета двух тел без учета нарушения осесимметричного характера обтекания имеет вид системы четырех уравнений:

Лидирующее тело (1)

$$m_1 \frac{dV_1}{dt} = -Cx_1 \frac{\rho V_1^2}{2} S_1; \quad \frac{dX_1}{dt} = V_1$$

Тело в следе (2)

$$m_2 \frac{dV_2}{dt} = -Cx_2 \frac{\rho V_2^2}{2} S_2; \quad \frac{dX_2}{dt} = V_2$$

Так как интерес представляет относительное движение тел, то предположим

$$V_2 = V_1 + V, \quad X_2 = X_1 + X$$

Тогда

$$m_2 \frac{dV_1}{dt} + m_2 \frac{dV}{dt} = -Cx_2 \frac{\rho V_2^2}{2} S_2,$$

Или

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{Cx_2}{m_2} \frac{\rho V_2^2}{2} S_2 - \frac{dV_1}{dt}.$$

Далее

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{Cx_2}{m_2} \frac{\rho V_2^2}{2} S_2 + \frac{Cx_1}{m_1} \frac{\rho V_1^2}{2} S_1$$

Так как $V \ll V_1$, то $V_2^2 \approx V_1^2 = V_\infty^2$, то в итоге получаем

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{\rho V_\infty^2}{2} \left[\frac{1}{m_2} Cx_2 S_2 - \frac{1}{m_1} Cx_1 S_1 \right]$$

Если предположить, что и первое и второе тело состоят из вещества с одинаковой плотностью, то имеем

$$m_1 = \rho_m \frac{1}{6} \pi d_1^3; \quad S_1 = \frac{1}{4} \pi d_1^2,$$

$$m_2 = \rho_m \frac{1}{6} \pi d_2^3; \quad S_2 = \frac{1}{4} \pi d_2^2$$

Следовательно

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{3}{2} \frac{\rho}{\rho_m} \frac{V_\infty^2}{2} \left[\frac{1}{d_2} Cx_2 - \frac{1}{d_1} Cx_1 \right]$$

Введем безразмерные переменные (которые ниже обозначены чертой сверху)

$$X = d_1 \bar{X}; \quad V = V_\infty \bar{V}; \quad t = \frac{d_1}{V_\infty} \bar{t}$$

Уравнение принимает следующий вид (черта сверху опущена):

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{3}{4} \frac{\rho}{\rho_m} \left[\frac{d_1}{d_2} Cx_2 - Cx_1 \right], \quad \frac{dX}{dt} = -V$$

или

$$\frac{dV}{dt} = \frac{3}{4} \frac{\rho}{\rho_m} A, \quad \frac{dX}{dt} = -V,$$

где $A = Cx_1 - \frac{1}{d} Cx_2$ – есть функция от расстояния между телами, определяется по аэродинамическим расчетам.

Ось X направлена от лидирующего тела 1 к телу 2. Тело 1 расположено в начале координат 0. Когда скорость V положительна, это означает что тело 2 догоняет тело 1 и расстояние между телами сокращается, этим обусловлен знак минус перед скоростью в уравнении для описания координаты X второго тела относительно тела 1.

В итоге в окончательном уравнении есть отношение плотности среды, в которой движется система тел, и плотности вещества, из которого состоят тела. Данный параметр обычно

есть маленькая величина, который фактически определяет маленькую величину относительной скорости двух тел.

Кроме отношения плотностей в уравнении есть комбинация из коэффициентов сопротивления и относительного диаметра второго тела. Данный параметр зависит от расстояния между телами и фактически определен по результатам расчетов задачи обтекания системы двух тел для нескольких значений относительного диаметра второго тела. Гистерезис в аэродинамических характеристиках необходимо учитывать выбором значений аэродинамических коэффициентов в зависимости от реализуемой схемы обтекания и перестройки ее при переходе через критические точки X_1 и X_2 .

На рис. 14 приведено значение функции $A = A(X)$ при диаметре второго тела $d = 0.5, 0.7, 1.0, 1.5$ и 2.0 по результатам расчетов, представленных выше.

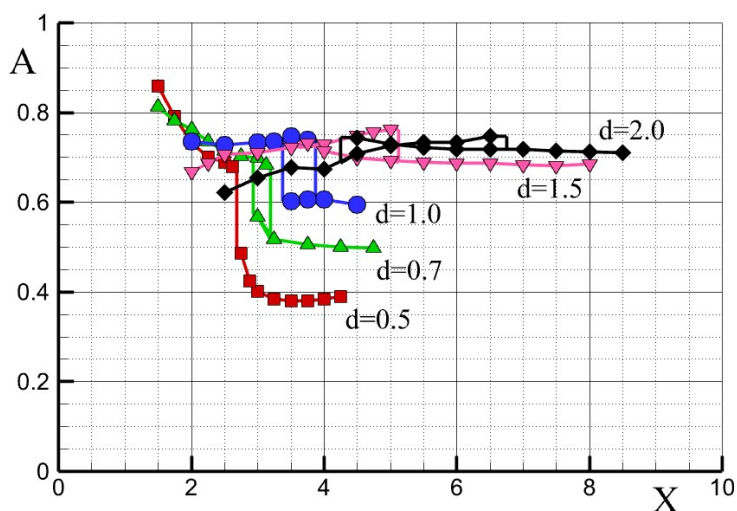


Рис. 14. Значение функции $A = A(X)$

Отметим, что во всех случаях, представленных на рис. 14, значение A положительно. Согласно полученным уравнениям, это означает, что в случае начальной нулевой относительной скорости второе тело будет догонять первое тело.

По представленным результатам значение A уменьшается в двух случаях: 1) с уменьшением d , если второе тело расположено в области $X > X_1$; 2) с увеличением d , если второе тело расположено в области $X < X_2$.

Для подтверждения первого предположения были выполнены расчеты обтекания системы двух сфер, когда диаметр второй сферы последовательно уменьшался до $d = 0.1$, при фиксированном положении ее центра $X = 3.5$. На рис. 15 представлено изменение коэффициентов сопротивления первой и второй сфер и значения коэффициента A в зависимости от d .

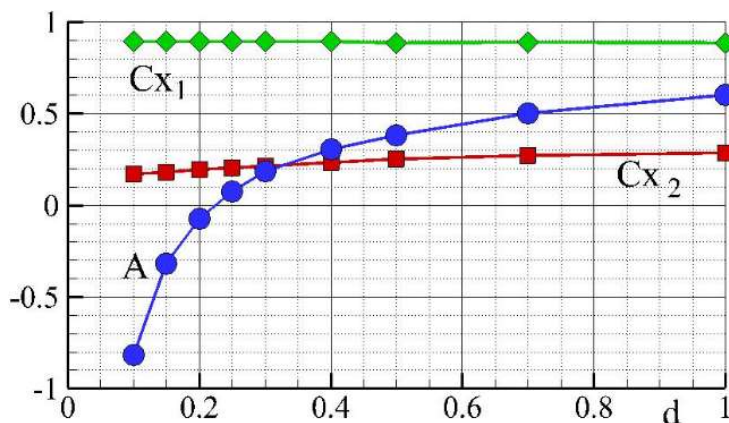


Рис. 15. Изменение коэффициента A от d , $X = 3.5$

Только при уменьшении d до меньше, чем ≈ 0.225 , значение коэффициента A становится отрицательным. Только в этом случае второе тело будет отставать от первого тела. Столь значительно меньший размер второй сферы, для получения более худших баллистических характеристик относительно первой сферы, обусловлен нахождением ее в следе, в котором коэффициент сопротивления значительно меньше. На рис. 16 приведено поле течения для случая $d = 0.2$, $X = 3.5$.

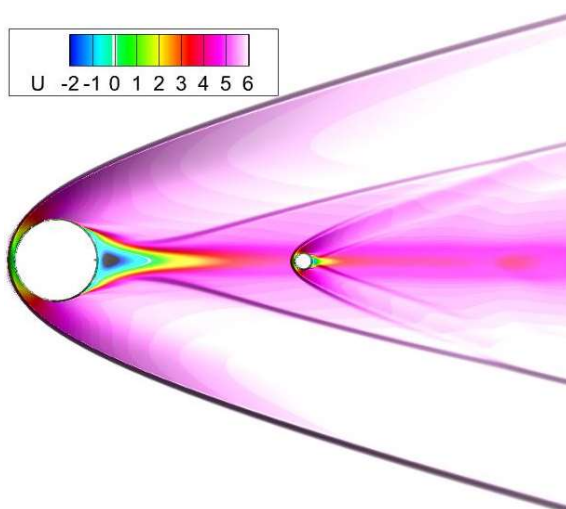


Рис. 16. Течение при $d = 0.2$, $X = 3.5$

Очевидно, что с увеличением расстояния между сферами, коэффициент сопротивления второй сферы будет расти. Это означает, что если второе тело имеет диаметр меньше, чем 0.225, и оно находится на расстоянии больше, чем X_1 , то оно будет отставать от первого тела.

Если второе тело расположено в области $X < X_2$, то величина A уменьшается с увеличением d . На рис. 17 представлено изменение коэффициентов сопротивления первой и второй сфер и значения коэффициента A в зависимости от d с увеличением d до 10. Положение центра второй сферы $X = 2 + 0.5d$.

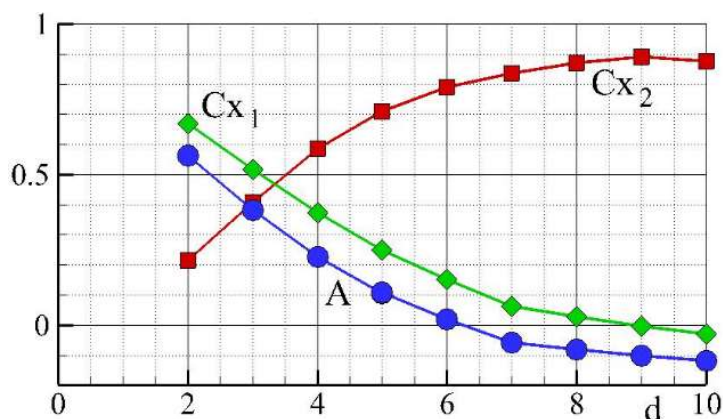


Рис. 17. Изменение коэффициента A от d , $X = 2 + 0.5d$

Представляет интерес, что с увеличением d второе тело, имеющее лучшие баллистические свойства, также попадает в условия, когда оно будет отставать от маленького тела, расположенного впереди ($d > 6$). Как видно из данных на рис. 17, первое тело в этом случае будет испытывать значительно меньшее сопротивление. На рис. 18 приведено поле течения для случая $d = 8$, $X = 6$.

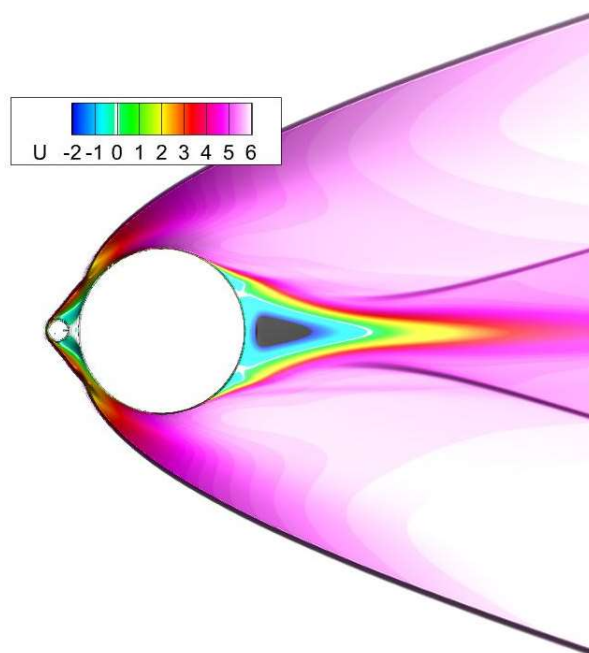


Рис. 18. Течение при $d = 8, X = 6$

В данном случае очевидно, что уменьшение сопротивления первого тела обусловлено увеличением влияния второго тела на течение в донной области первого тела. По всей видимости с увеличением расстояния между телами, данный эффект будет уменьшаться, а значит значение коэффициента A будет расти и очевидно станет положительным.

5. Заключение

На примере обтекания двух сфер, расположенных вдоль потока, показана возможность построения методами вычислительной аэродинамики двух вариантов схем обтекания при одних значениях параметров. Фактически выявлена область гистерезиса. Возможность выявления области гистерезиса осуществляется проведением расчетов с дискретным постепенным изменением определяющего параметра в двух направлениях. Проведение расчетов по данной методике имеет большое значение в условиях, когда решение в достаточно близких условиях может иметь качественно разную структуру течения. Это важно для правильного решения поставленной задачи и необходимо учитывать при исследовании задач методами вычислительной аэродинамики, когда обычно в качестве начального поля течения используются условия в набегающем потоке.

Представлена модель относительного продольного движения двух тел. Полученная оценка аэродинамического сопротивления двух тел позволяет дать оценку характера относительного движения тел.

Благодарности и ссылки на гранты

Исследование выполнено в рамках государственного задания МГУ им. М.В. Ломоносова.

Литература

1. Хлебников В.С. Исследование течения перед сферой, помещенной в следе тела, при сверхзвуковом обтекании // Ученые записки ЦАГИ. 1971, Т. 2, № 1, с. 42–48.
2. Хлебников В.С. Перестройка течения между парой тел, одно из которых расположено в следе другого, при сверхзвуковом обтекании // Ученые записки ЦАГИ. 1978, Т. 7, № 3, с. 133–136.

3. Хлебников В.С. Осесимметричное обтекание пары тел сверхзвуковым потоком газа // Ученые записки ЦАГИ. 1978, Т. 9, № 6, с. 108–114.
4. Пилюгин Н.Н., Талипов Р.Ф., Хлебников В.С. Обтекание тел неравномерным сверхзвуковым потоком типа следа // Теплофизика высоких температур. 1996. Т. 34. Вып. 5. С. 780–795.
5. Пилюгин Н.Н., Хлебников В.С. Проблема создания парашютной системы для торможения летательного аппарата при сверхзвуковых режимах // Прикладная механика и техническая физика. 2010. Т. 51. № 5. С. 5–16.
6. Хлебников В.С. Аэротермодинамика элементов летательных аппаратов при стационарном и нестационарном сверхзвуковом обтекании. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. 168 с.
7. Laurence S.J., Parziale N.J., Deiterding R. Dynamical separation of spherical bodies in supersonic flow // Journal of Fluid Mechanics. 2012. Vol. 713. Pp. 159–182. <https://doi.org/10.1017/jfm.2012.453>
8. Максимов Ф.А. Сверхзвуковое обтекание системы тел // Компьютерные исследования и моделирование. 2013. Т. 5. № 6. С. 969–980.
9. Li T., Sui J., Gong S., Wu C. Dynamical separation of rigid bodies in supersonic flow // Science China Technological Sciences. 2015. Vol. 58. No. 12. Pp. 2110–2121.
10. Lukashenko V.T., Maksimov F.A. On the separation of two meteoroid fragments of different shapes // Journal of Physics: Conference Series. 2020. Vol. 1479. No. 012132. Pp. 1–10.
11. Cardona V., Jousset R., Lago V. Shock/shock interferences in a supersonic rarefied flow: experimental investigation // Experiments in Fluids. 2021. Vol. 62, iss. 6. Art. Id 135. DOI: 10.1007/s00348-021-03225-4
12. Laurence S.J., Deiterding R. Shock-wave surfing // Journal of Fluid Mechanics. 2011. Vol. 676. Pp. 396–431. <https://doi.org/10.1017/jfm.2011.57>
13. Seltner P.M., Willems S., Gulham A. Aerodynamic interactions of blunt bodies free-flying in supersonic flow // Experiments in Fluids. 2024. Vol. 65. Art. Id 80.
14. Гувернюк С.В., Зубков А.Ф., Симоненко М.М., Швеиц А.И. Экспериментальное исследование трехмерного сверхзвукового обтекания осесимметричного тела с кольцевой каверной // Изв.РАН. МЖГ. 2014. № 4. С. 136–142. <https://doi.org/10.1134/S0015462814040140>
15. Шишаева А. С., Симоненко М. М., Гувернюк С. В., Аксенов А. А. Численное моделирование аэродинамического гистерезиса при сверхзвуковом обтекании осесимметричного тела с каверной в программном комплексе FlowVision // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2017. Т. 18. № 1. <http://chemphys.edu.ru/issues/2017-18-1/articles/696/>
16. Симоненко М. М., Зубков А. Ф. Режимы сверхзвукового обтекания кольцевых каверн под углами атаки // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2023. Т. 24. № 3. <http://chemphys.edu.ru/issues/2023-24-3/articles/1046/>
17. Симоненко М. М. Сверхзвуковое обтекания кольцевой каверны на осесимметричном заостренном теле // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2024. Т. 25. № 6. <http://chemphys.edu.ru/issues/2024-25-6/articles/1133/>
18. Максимов Ф.А., Шевелев Ю.Д. Моделирование обтекания проницаемых поверхностей // Математическое моделирование. 2018. Т. 11. С. 127–144.
19. Максимов Ф.А. Численное моделирование гистерезиса при обтекании системы двух тел // Математическое моделирование и численные методы. 2025. Т. 1. С. 57–79.
20. Максимов Ф. А. Численное моделирование гистерезиса при обтекании осесимметричного сопла // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2025. Т. 26. № 1. <http://chemphys.edu.ru/issues/2025-26-1/articles/1160/>

References

1. Khlebnikov V.S., Study of the flow in front of a sphere placed in the wake of a body during supersonic flow, *TsAGI Science Journal*, 1971, vol. 2, no. 1, pp. 42–48.
2. Khlebnikov V.S., Restructuring of the flow between a pair of bodies, one of which is located in the wake of the other, during supersonic flow, *TsAGI Science Journal*, 1976, vol. 7, №3, pp. 133–136.
3. Khlebnikov V.S., Axisymmetric flow of a supersonic gas flow around a pair of bodies, *TsAGI Science Journal*, 1978, vol. 9, № 6, pp.108–114.
4. Pilyugin N.N., Talipov R.F., Khlebnikov V.S., Supersonic nonuniform wake flow past bodies, *High Temperature*, 1996, vol. 34, iss. 5, pp. 770–784.
5. Pilyugin N.N., Khlebnikov V.S., Development of a Parachute System for Deceleration of Flying Vehicles in Supersonic Regimes, *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2010, vol. 51, iss. 5, pp. 323–332. DOI: 10.1007/s10808-010-0080-4
6. Khlebnikov V.S., *Aerothermodynamics of aircraft elements under stationary and unsteady supersonic flow*, M.: FIZMATLIT, 2014, 168 p. [in Russian].
7. Laurence S.J., Parziale N.J., Deiterding R., Dynamical separation of spherical bodies in supersonic flow, *Journal of Fluid Mechanics*, 2012, vol. 713, pp. 159–182. <https://doi.org/10.1017/jfm.2012.453>
8. Maksimov F.A., Supersonic flow of system of bodies, *Computer Research and Modeling*, 2013, vol. 5, iss. 6, pp. 969–980. DOI: 10.20537/2076-7633-2013-5-6-969-980
9. Li T., Sui J., Gong S., Wu C., Dynamical separation of rigid bodies in supersonic flow, *Science China Technological Sciences*, 2015, vol. 58, no. 12, pp. 2110–2121.
10. Lukashenko V.T., Maksimov F.A., On the separation of two meteoroid fragments of different shapes, *Journal of Physics: Conference Series*, 2020, vol. 1479, 012132, pp. 1–10.
11. Cardona V., Jousset R., Lago V., Shock/shock interferences in a supersonic rarefied flow: experimental investigation, *Experiments in Fluids*, 2021, vol. 62, iss. 6, art. id 135. DOI: 10.1007/s00348-021-03225-4
12. Laurence S.J., Deiterding R., Shock-wave surfing, *Journal of Fluid Mechanics*, 2021, pp. 396–431. <https://doi.org/10.1017/jfm.2011.57>
13. Seltner P.M., Willems S., Gulham A., Aerodynamic interactions of blunt bodies free-flying in supersonic flow, *Experiments in Fluids*, 2024, vol. 65, art.id 80.
14. Guvernuyuk S. V., Zubkov A. F., Simonenko M. M., and Shvetz A. I., Experimental investigation of three-dimensional supersonic flow past an axisymmetric body with an annular cavity, *Fluid Dyn.*, 2014, vol. 49, issue 4, pp. 540–546. <https://doi.org/10.1134/S0015462814040140>
15. Shishaeva A. S., Simonenko M. M., Guvernuyuk S. V., Aksenov A. A., Numerical Simulation of Aerodynamic Hysteresis in Supersonic Flow Over an Axisymmetric Body with Annular Cavity in FlowVision CFD Soft-ware, *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, 2017, vol. 18, issue 1 [in Russian]. <http://chemphys.edu.ru/issues/2017-18-1/articles/696/>
16. Simonenko M. M., Zubkov A. F., Supersonic flow modes of annular cavities at angles of attack, *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, 2023, vol. 24, issue 3 [in Russian]. <http://chemphys.edu.ru/issues/2023-24-3/articles/1046/>
17. Simonenko M. M. Supersonic flow around an annular cavity on an axisymmetric pointed body, *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, 2024, vol. 25, issue 6 [in Russian]. <http://chemphys.edu.ru/issues/2024-25-6/articles/1133/>
18. Shevelev Y.D., Maksimov F.A., Modeling Flow around permeable surfaces, *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2019, vol. 11, no. 4, pp. 531–541.
19. Maksimov F.A., Numerical modeling of hysteresis in flow around a system of two bodies, *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2025, №1, pp. 57–79 [in Russian]. DOI: 10.18698/2309-3684-2025-1-5779

20. Maksimov F. A. Numerical simulation of hysteresis in flow around an axisymmetric nozzle, *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, 2025, vol. 26, issue 1 [in Russian]. <http://chemphys.edu.ru/issues/2026-26-1/articles/1160/>

Статья поступила в редакцию 16 июня 2026 г.