

# Propagation of Two-Dimensional Periodic Surface Disturbances in a Viscous Continuously Stratified Fluid

A. A. Ochirov, Yu. D. Chashechkin

*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, 119526, Russia*  
 otchirov@mail.ru, yulidch@gmail.com

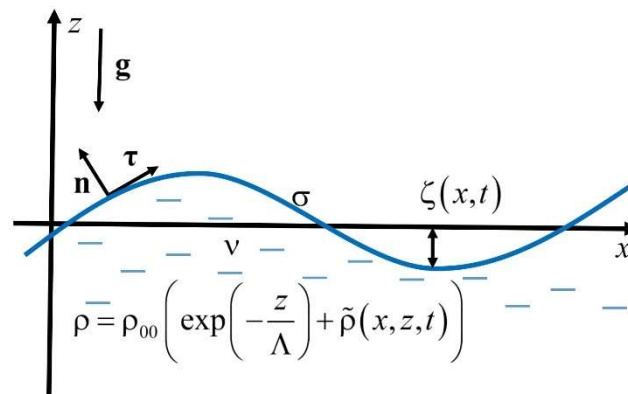
## Abstract

The formulation of the problem of propagation of two-dimensional periodic flows, including capillary-gravity waves and accompanying perturbations of the free surface of a viscous continuously stratified fluid, is analyzed using a reduced system of fundamental equations of fluid mechanics with physically justified boundary conditions. Spectral equations of motion and dispersion relations for all components of surface flows of a viscous exponentially stratified fluid are obtained for the first time without the Boussinesq approximation. Complete solutions to the problem include the construction of regular and singular roots of the fourth-order dispersion relation, determining both the waves and the ligaments. In the weak dissipation approximation, further analysis of the flow properties can be performed numerically or using analytical methods of the combined theory of regular and singular perturbations.

Keywords: viscosity, stratification, surface tension, two-dimensional periodic flows, dispersion relation, free surface.

In the two-dimensional formulation of the reduced problem of surface periodic perturbation propagation in a heterogeneous fluid, a spectral equation of motion has been obtained that enables the determination of dispersion characteristics of wave and ligament components of the flow:

$$\omega(k_x^2 - k_z^2)(i\nu(k_x^2 - k_z^2) + \omega) + \frac{\omega k_z}{\Lambda}(i\nu(k_x^2 - k_z^2) + \omega) - N^2 k_x^2 = 0$$



Formulation of the reduced problem of surface periodic perturbation propagation in a heterogeneous fluid

УДК 532.5.032

# Распространение двумерных периодических поверхностных возмущений в вязкой непрерывно стратифицированной жидкости

А. А. Очиров, Ю. Д. Чашечкин

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН,  
Россия, Москва, 119526, проспект Вернадского, д. 101-1  
otchirov@mail.ru, yulidch@gmail.com*

## Аннотация

Анализируется постановка задачи распространения двумерных периодических течений, включающих капиллярно-гравитационные волны и сопутствующие возмущения свободной поверхности вязкой непрерывно стратифицированной жидкости на основе редуцированной системы фундаментальных уравнений механики жидкостей с физически обоснованными граничными условиями. Впервые получены спектральные уравнения движения и дисперсионные соотношения для всех компонентов поверхностных течений вязкой экспоненциально стратифицированной жидкости без использования приближения Буссинеска. Полные решения задачи включают построение регулярных и сингулярных корней дисперсионного соотношения четвертого порядка, определяющими и волны, и лигаменты. В приближении слабой диссипации дальнейший анализ свойств течений может проводиться численно или аналитическими методами объединенной теории регулярных и сингулярных возмущений.

Ключевые слова: вязкость, стратификация, поверхностное натяжение, двумерные периодические течения, дисперсионное соотношение, свободная поверхность.

## 1. Введение

Изучение возмущений свободной поверхности жидкости представляет большой академический интерес в связи с большим количеством практических приложений. Математическая теория волн излагается в классических монографиях и учебниках [1 – 5]. Современные исследователи используют разнообразные подходы к изучению поверхностных течений жидкости. Происходит развитие экспериментальной техники, аналитических методов и программ численных расчетов, в том числе с использованием кодов прямого численного моделирования.

В современных работах численно исследуется рост коротких гравитационно-капиллярных волн под воздействием ветрового воздействия путем решения двухфазных уравнений Навье-Стокса для оценки подповерхностного дрейфового слоя и анализа нелинейного роста волн с различными длинами [6]. Численно моделируется динамика свободной поверхности в задачах волн, а также волновое и структурное взаимодействие [7].

Отдельного внимания заслуживает изучение влияния поверхностного натяжения на границе раздела сред и на свободной поверхности. Капиллярные волны и тонкая структура возникают в процессах слияния капли свободно подающей жидкости в импактном режиме [8]. Исследуются капиллярные волны на границе раздела смешивающихся жидкостей [9]. Периодические возмущения, возникающие на границе раздела двух несмешивающихся жидких сред, изучаются в задачах микрофлюидики [10] Экспериментальные исследования показывают, что капиллярные колебания формируют направленный поток жидкости [11]. Новые

математические модели бегущих поверхностных волн с учетом поверхностного натяжения приведены в [12]

Существующие в природе жидкости оказываются структурированными – на поверхности и в толще вследствие анизотропии атомно-молекулярных свойств жидкостей образуются микроструктурные комплексы и ассоциаты [13]. Тонкая структура среды наблюдается и в естественных, и в лабораторных условиях [14]. В непрерывно стратифицированной жидкости под влиянием вертикального перемешивания тонкоструктурные высокоградиентные прослойки возникают между квазиоднородными слоями жидкости [15]. Тонкая структура стратифицированных течений также наблюдалась и исследовалась в микроканалах [16]. Высокоградиентные прослойки возникают на границе раздела двух жидкостей и увлекаются потоком.

В недавних исследованиях развита аналитическая асимптотическая методика построения волновых и лигаментных тонкоструктурных решений, описывающих поверхностные возмущения с использованием приближения Буссинеска [17], которое существенным образом упрощает математические выкладки и позволяет получать быстрые оценочные значения всех компонентов течений.

В современных исследованиях динамики океана доминируют численные модели, поскольку сложность реальных океанических процессов требует учета большого числа взаимовлияющих факторов. Так как геометрия океанических бассейнов и структур нерегулярна и не описывается простыми аналитическими функциями, для расчета динамики и структуры океанических течений приходится использовать коды с высоким пространственно-временным разрешением. В то же время аналитические методы находят применение в первоначальном теоретическом анализе для получения быстрых оценок явлений и начальных приближений для численных схем, определения размеров расчетных адаптивных сеток, валидации численных моделей. Настоящая работа посвящена анализу постановки асимптотической задачи расчета динамики и структуры поверхностных капиллярно-гравитационных течений в стратифицированных вязких жидкостях без использования распространенного приближения Буссинеска [4, 5, 17], упрощающего проведение вычислений.

## **2. Постановка задачи**

### **2.1. Собственные масштабы задачи**

В природных и в лабораторных условиях все жидкости и газы являются гетерогенными – плотность варьируется в связи с изменениями физических переменных, таких как давление, температура, концентрация примесей, и стратифицируются в гравитационном поле. Распределения плотности среды обладают набором собственных параметров, определяющих естественные временные и пространственные масштабы протекающих процессов. При расчете динамики и структуры поверхностных течений в океане необходимо учитывать разномасштабность протекающих явлений. В таблице 1 представлены значения собственных параметров, возникающих в модели вязкой несжимаемой стратифицированной среды в лабораторных и природных условиях.

Потенциально однородная жидкость – это физически обоснованная модель однородной жидкости, в которой, как и в стратифицированной среде наблюдаются тонкоструктурные элементы – выделяющиеся своими свойствами тонкие слои и волокна. Актуально однородная среда – математическая абстракция, не имеющая природных аналогов. При выборе математической модели полезно определять собственные параметры задачи, описывающие характерные разномасштабные компоненты течений.

Таблица 1

## Собственные параметры стратифицированной среды

Параметр	Стратифицированная		Однородная	
	Сильно	Слабо	Потенциально	Актуально
$N, \text{с}^{-1}$ – частота плавучести	1	0.01	$10^{-5}$	0.0
$T_b$ – период плавучести	10 с	10 мин	10 дней	$\infty$
$\Lambda$ – масштаб стратификации	10 м	100 км	$10^8$ км	$\infty$
$\delta_N^{gv} = (g\nu)^{1/3} N^{-1}$ , см – вязкий волновой масштаб	2	200	$2 \times 10^5$	$\infty$
$\delta_N^v = \sqrt{\nu/N}$ , см – микромасштаб Рэлея	0.1	1	30	$\infty$

## 2.2. Система фундаментальных уравнений механики жидкостей

При математическом описании поверхностных течений в гетерогенных жидкостях, встречающихся в природе, необходимо учитывать распределения, флуктуации и перенос температуры и концентрации содержащихся примесей. Для учета процессов конверсии энергии, происходящих при разрушении, преобразовании и взаимодействии различных компонентов течений необходимо записывать уравнение баланса энергии. Систему фундаментальных уравнений механики жидкостей необходимо решать совместно с физически обоснованными начальными и граничными условиями. На твердой поверхности выполняется условие непротекания и прилипания, а на свободной поверхности необходимо задать кинематические и динамические граничные условия. Также используются условия отсутствия потоков на граничных поверхностях и затухания скорости с удалением от свободной поверхности. С учетом сказанного система фундаментальных уравнений механики гетерогенных жидкостей с граничными и начальными условиями записывается следующим образом [18]:

$$\begin{aligned}
 G &= G(P, S, s_n, T), \quad \rho = \rho(P, S, s_n, T), \\
 \partial_t \rho + \nabla_j (p^j) &= Q_\rho, \\
 \partial_t (p^i) + \nabla_j \Pi^{ij} &= \rho g^i + 2\varepsilon^{ijk} p_j \Omega_k + Q^i, \\
 \partial_t (\rho T) + \nabla_j (p^j T) &= \Delta(\kappa_T \rho T) + Q_T, \\
 \partial_t (\rho s_n) + \nabla_j (p^j s_n) &= \Delta(\kappa_s \rho s_n) + Q_{s_n}, \\
 \mathbf{u}|_\Sigma = 0, \mathbf{u}|_{t \leq 0} = 0, P|_{t \leq 0} = P_0, \frac{\partial s_n}{\partial \mathbf{n}}|_\Sigma = 0, \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}}|_\Sigma = 0, s_n|_{t \leq 0} = s_{n0}, T|_{t \leq 0} = T_0, \\
 \frac{DF}{Dt} \Big|_{z=\zeta} &= \frac{\partial F}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) F \Big|_{z=\zeta} = 0, \quad n_j \sigma^{ij} \Big|_{z=\zeta} = \sigma \nabla_j n^j \Big|_{z=\zeta}, \quad \mathbf{u}|_{z \rightarrow -\infty} \rightarrow 0
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь  $G$  – потенциал Гиббса;  $P$  – давление;  $S$  – энтропия;  $s_n$  – солёность  $n$ -й примеси;  $T$  – температура;  $Q_\rho, Q^i, Q_T, Q_{s_n}$  – функции источников массы, импульса, температуры и концентрации  $i$ -й примеси соответственно;  $\mathbf{p}$  – импульс;  $\Pi^{ij} = \rho u^i u^j + P \delta^{ij} - \sigma^{ij}$  – компоненты тензора плотности потока импульса  $u^i$  компоненты скорости жидкости  $\mathbf{u} = \mathbf{p}/\rho$ ;  $\rho$  – плотность;  $\delta^{ij}$  – дельта функция;  $\sigma^{ij} = \mu \left( \frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \frac{\partial u^j}{\partial x^i} - \frac{2}{3} \delta^{ij} \frac{\partial u^k}{\partial x^k} \right) + \eta \delta^{ij} \frac{\partial u^k}{\partial x^k}$  – тензор вязких напряжений;  $\mu, \eta$  – динамическая и вторая вязкость соответственно;  $\mathbf{g}$  – ускорение свободного

падения;  $\varepsilon^{ijk}$  – символ Леви – Чивиты;  $\Omega$  – угловая скорость глобального вращения;  $K_T, K_{S_n}$  – коэффициенты теплопроводности и диффузии  $i$ -ой примеси соответственно, символом  $\Sigma$  обозначены твердые поверхности, нижним индексом «0» – начальные распределения соответствующих величин;  $n^j$  – компоненты вектора нормали к поверхности  $\mathbf{n}$ ; символом  $F$  обозначена функция, уравнение  $F(x, y, z, t) = 0$  для которой неявным образом описывает форму свободной поверхности жидкости;  $\zeta$  – отклонение свободной поверхности от равновесного положения;  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения жидкости.

Включение потенциала Гиббса  $G$  в систему фундаментальных уравнений позволяет учесть влияние процессов конверсии энергии, дополняющих механизмы передачи и диссипации кинетической энергии, на динамику и структуру течений [18].

Система (1) имеет высокий ранг и соответствующее количество корней. Решения задачи (1) описывают все компоненты поверхностных периодических течений гетерогенной жидкости. Для получения аналитических решений необходимо прибегать к упрощениям модели, что приводит к понижению порядка системы и отбрасыванию некоторых решений, описывающих компоненты периодических течений. В наиболее простой модели учитывается только неоднородность распределения плотности без анализа физических причин ее формирования.

### 2.3. Редуцированная система уравнений

Рассмотрим задачу о распространении двумерных малых периодических возмущений свободной поверхности в модели вязкой стратифицированной жидкости в поле сил тяжести с учетом влияния поверхностного натяжения в декартовой системе координат  $Oxz$  (см. рис. 1.)

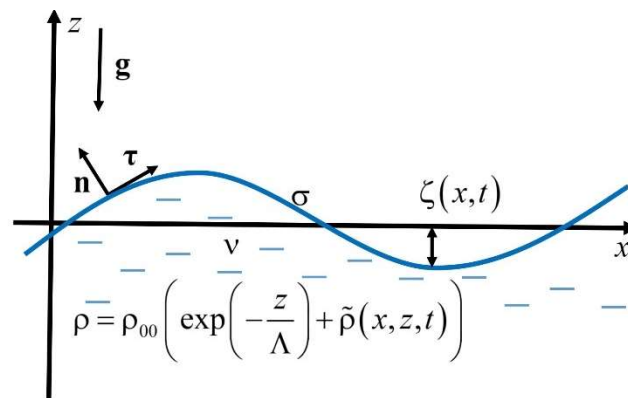


Рис. 1. Постановка редуцированной задачи о распространении поверхностных периодических возмущений в гетерогенной жидкости

Рассматривается стратифицированная жидкость с равновесным распределением плотности  $r(z)$ , заменяющим уравнение состояния, связывающее возмущения плотности  $\tilde{\rho}$  и других физических переменных. Для широкого класса задач равновесное распределение принимается экспоненциальным  $r(z) = \exp(-z/\Lambda)$ ,  $z_\Lambda = z/\Lambda$  – вертикальная координата, нормированная на масштаб стратификации  $\Lambda = |d \ln \rho(z)/dz|^{-1}$ ,  $\rho_{00}$  – равновесное значение плотности на невозмущенной поверхности жидкости  $z = 0$ ,  $\nu = \mu/\rho_{00}$  – кинематическая вязкость. Преобразование масштабов [19] позволяет привести систему определяющих уравнений с произвольным распределением плотности к уравнениям с постоянными коэффициентами, как и в рассматриваемом случае.

Давление жидкости распишем через сумму атмосферного  $P_0$ , гидростатического и периодического возмущения  $\tilde{P}(x, z, t)$ , связанного с распространением поверхностных периодических течений давления

$$P = P_0 + \int_z^\zeta g\rho(x, \xi, t) d\xi + \tilde{P}(x, z, t) \quad (2)$$

Также дополнительно будем считать, что жидкость несжимаема,  $\text{div } \mathbf{u} = 0$ , и поле скоростей соленоидально. В этом случае компоненты вектора скорости выражаются через скалярную функцию тока  $\psi$

$$\mathbf{u} = \left( \frac{\partial \psi}{\partial z}, -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \quad (3)$$

С учетом сделанных предположений и упрощений система фундаментальных уравнений механики жидкости (1) редуцируется и, принимая во внимание (2)–(3) для экспоненциально стратифицированной жидкости принимает вид

$$\left\{ \begin{array}{l} z < \zeta : \left\{ \begin{array}{l} \rho(\partial_{zt}\psi - \partial_x\psi\partial_{zz}\psi + \partial_z\psi\partial_{xz}\psi) = -v\rho\partial_z\Delta\psi - \partial_x P \\ \rho(-\partial_{xt}\psi + \partial_x\psi\partial_{xz}\psi - \partial_z\psi\partial_{xx}\psi) = v\rho\partial_x\Delta\psi - \partial_z P + \rho g \\ \partial_t\rho + \partial_x\rho\partial_z\psi - \partial_z\rho\partial_x\psi = 0 \\ \rho = \rho_{00}(\exp(-z_\Lambda) + \tilde{\rho}(x, z, t)) \end{array} \right. \\ \\ z = \zeta : \left\{ \begin{array}{l} \partial_t(z - \zeta) - \partial_z\psi\partial_x\zeta - \partial_x\psi + \partial_x\psi\partial_x\zeta = 0 \\ \frac{1}{1 + (\partial_x\zeta)^2} \left( (\partial_x\zeta)^2 \partial_{xx}\psi - 2\partial_x\zeta\partial_{xz}\psi + \partial_{zz}\psi \right) - \\ - \frac{1}{1 + (\partial_x\zeta)^2} \left( (\partial_x\zeta)^2 \partial_{zz}\psi + 2\partial_x\zeta\partial_{xz}\psi + \partial_{xx}\psi \right) = 0 \\ \tilde{P} + \frac{\sigma\partial_{xx}\zeta}{(1 + (\partial_x\zeta)^2)^{3/2}} - \frac{2\rho v}{1 + (\partial_x\zeta)^2} \left[ ((\partial_x\zeta)^2 - 1)\partial_{xz}\psi + \partial_x\zeta(\partial_{xx}\psi - \partial_{zz}\psi) \right] = 0 \end{array} \right. \\ \\ z \rightarrow -\infty : \left( \frac{\partial \psi}{\partial z}, -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \rightarrow (0, 0) \end{array} \right. \quad (4)$$

Для возмущений малой амплитуды система (4) линеаризуется

$$\left\{ \begin{array}{l} z < 0 : \left\{ \begin{array}{l} \rho_{00}g\partial_x\zeta + \rho_{00}g\int_z^0 \partial_x\tilde{\rho}(x, \xi, t) d\xi + \rho_{00}e^{-z_\Lambda}\partial_{zt}\psi - v\rho_{00}e^{-z_\Lambda}\partial_z\Delta\psi + \partial_x\tilde{P} = 0 \\ -\rho_{00}e^{-z_\Lambda}\partial_{xt}\psi + v\rho_{00}e^{-z_\Lambda}\partial_x\Delta\psi + \partial_z\tilde{P} = 0 \\ \rho_{00}g\partial_t\tilde{\rho} + \rho_{00}N^2e^{-z_\Lambda}\partial_x\psi = 0 \end{array} \right. \\ \\ z = 0 : \left\{ \begin{array}{l} \partial_t\zeta + \partial_x\psi = 0 \\ \partial_{zz}\psi - \partial_{xx}\psi = 0 \\ \tilde{P} + \sigma\partial_{xx}\zeta + 2\rho v\partial_{xz}\psi = 0 \end{array} \right. \\ \\ z \rightarrow -\infty : \left( \frac{\partial \psi}{\partial z}, -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \rightarrow (0, 0) \end{array} \right. \quad (5)$$

Здесь  $N^2 = g/\Lambda$  – это квадрат частоты плавучести в несжимаемой жидкости, определяющей частоту осцилляций тела нейтральной плавучести, находящегося на уровне  $z$ . В экспоненциально стратифицированных жидкостях частота плавучести оказывается постоянной величиной  $N = \text{const}$ .

### 3. Спектральное уравнение движения. Дисперсионные соотношения

Решение такого класса задач ищется в виде бегущих периодических гармонических функций

$$\begin{pmatrix} \zeta \\ \psi \\ \tilde{P} \\ \tilde{\rho} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ \Psi_m \exp(k_z z) \\ P_m \exp(k_z z) \\ R_m \exp(k_z z) \end{pmatrix} \exp(ik_x x - i\omega t) + C.C. \quad (6)$$

Здесь  $A, \Psi_m, P_m, R_m$  – амплитуды соответствующих величин,  $\omega$  – частота периодического движения,  $\mathbf{k} = (k_x, k_z)$  – волновой вектор, а символом  $C.C.$  обозначены комплексно сопряженные слагаемые.

Используя математические преобразования линеаризованной системы уравнений, можно свести уравнения движения к уравнению относительно одной скалярной функции тока

$$\partial_{tt} \Delta \psi - \nu \Delta \Delta \psi + \frac{\nu}{\Lambda} \partial_{zt} \Delta \psi - \frac{1}{\Lambda} \partial_{ztt} \psi + N^2 \partial_{xx} \psi = 0 \quad (7)$$

Подстановка вида решения (6) в (7) приводит к уравнению движения в спектральном виде

$$\omega(k_x^2 - k_z^2)(i\nu(k_x^2 - k_z^2) + \omega) + \frac{\omega k_z}{\Lambda}(i\nu(k_x^2 - k_z^2) + \omega) - N^2 k_x^2 = 0 \quad (8)$$

В гидродинамике для удобства решения и уменьшения громоздкости математических выкладок используется алгебра комплексных чисел. При этом чаще всего частота периодического движения полагается комплексной величиной, мнимая часть которой описывает декремент затухания. В настоящей работе используется подход, в котором частота периодического движения определяется как действительная положительная величина  $\omega > 0$ , а компоненты волнового вектора  $k_{x,z}$  могут быть комплексными, описывающими и периодическое течение, и пространственное затухание его компонентов [18]. Такой подход позволяет получить и крупномасштабные и тонкоструктурные компоненты течения, описываемые регулярными и сингулярными решениями спектрального уравнения движения (8) методами объединенной теории регулярных и сингулярных возмущений [20].

Анализ уравнения (8) требует отдельного исследования, однако, вид уравнения позволяет сделать предварительные выводы о некоторых свойствах его решений.

В отличие от часто используемого в задачах подобного типа приближения Буссинеска [17] в уравнении (8) не возникает зависимости от вертикальной координаты. В такой постановке нет необходимости рассматривать решения только вблизи поверхности, что уменьшает количество применяемых методов асимптотических разложений при решении задачи.

Также стоит отметить, что решение спектрального уравнения движения в развиваемой методике строится относительно вертикальной компоненты волнового вектора  $k_z$ . Зависимость горизонтальной компоненты волнового вектора  $k_x$  от частоты периодического движения  $\omega$  определяется из дисперсионного соотношения, которое получается из условия совместности уравнений движения и граничных условий. Уравнение (8) имеет четыре корня: два регулярных и два сингулярных, описывающих волновые и лигаментные компоненты течения

соответственно. Если ввести переобозначение  $k_l$  для лигаментных компонентов, то совместное решение системы (5) приводит к дисперсионному соотношению:

$$\begin{aligned} & (k_x^2 + k_z^2)(k_l \omega^2 - gk_x^2 - \sigma k_x^4 / \rho_{00} + i\omega \nu k_l (3k_x^2 - k_l^2)) - \\ & - (k_x^2 + k_l^2)(k_z \omega^2 - gk_x^2 - \sigma k_x^4 / \rho_{00} + i\omega \nu k_z (3k_x^2 - k_z^2)) = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Полный анализ и решение дисперсионного уравнения (9) возможен при получении точных или асимптотических решений спектрального уравнения движения (8). Совместное аналитическое решение (8) и (9) позволит получить дисперсионные характеристики всех компонентов поверхностных капиллярно-гравитационных возмущений в стратифицированной жидкости.

#### 4. Заключение

Сформулированная в настоящей работе задача позволяет применять развитую методику решения сингулярно возмущенных уравнений к задачам о распространении поверхностных периодических возмущений в постановке, не использующей распространенное приближение Буссинеска. Предварительный анализ вида спектрального уравнения движения показывает, что решение содержит как регулярные, так и сингулярные корни. При этом корни лишены недостатков аналогичных решений, возникающих в задачах, использующих дополнительные упрощения, такие как приближение Буссинеска. Получение решений в явном виде требует проведения дополнительного исследования.

#### Благодарности и ссылки на гранты

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации 124012500442-3).

#### Литература

1. Лэмб Г. Гидродинамика. М: ОГИЗ, 1947. 929 с.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Курс теорет. физики. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука. 1986. 736 с.
3. Филлипс О. М. Динамика верхнего слоя океана. Л.: Гидрометеоздат, 1980. 319 с.
4. Лайтхилл Дж. Волны в жидкостях. Пер. с англ. М.: Мир, 1981. 598 с.
5. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны М: Мир. 1977.
6. Wu J., Deike L. Wind wave growth in the viscous regime // *Physical Review Fluids*. 2021. Vol. 6. No. 9. Art.no. 094801.
7. Rai R. et al. A stable free-surface boundary solution method for fully nonlinear potential flow models // *Applied Ocean Research*. 2023. Vol. 134. Art.no. 103500.
8. Хайирбеков Ш. Х., Чашечкин Ю. Д. Пакет коротких кольцевых возмущений вокруг венца на начальном этапе слияния свободно падающей капли с покоящейся жидкостью в импактном режиме // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*. 2025. Т. 26, вып. 1. <http://chemphys.edu.ru/issues/2025-26-1/articles/1166/>
9. Carbonaro A. et al. Emergence of capillary waves in miscible coflowing fluids // *Physical Review Letters*. 2025. Vol. 134. No. 5. Art.no. 054001.
10. Hazra S. et al. Interfacial instability in a viscoelastic microfluidic coflow system // *Journal of Fluid Mechanics*. 2024. Vol. 1000. Art.no. A96.
11. Александров В. А. Генерация поверхностного потока жидкости в каналах капиллярными колебаниями и волнами // *Журнал технической физики*. 2022. Т. 92. № 2. С. 194–208.
12. Stan A. Symmetric Water Waves with Surface Tension: Traveling Wave Behavior and Maximal Horizontal Velocity // *Water Waves*. 2025. С. 1-11.

13. Eisenberg D, Kauzmann W. *The Structure and Properties of Water* (Oxford Classic Texts in the Physical Sciences). Oxford: Oxford University Press; 2005.
14. Федоров К. Н. Тонкая термохалинная структура океана. Л-д, Гидрометеиздат. 1976. 184 с.
15. Герасимов В. В., Зацепин А. Г. О расслоении линейно стратифицированной жидкости под влиянием однородного по вертикали перемешивания (лабораторный эксперимент) // *Фундаментальная и прикладная гидрофизика*. 2025. Т. 18. № 3. С. 77–87.
16. Hu X., Cubaud T. Viscous wave breaking and ligament formation in microfluidic systems // *Physical Review Letters*. 2018. Vol. 121. No. 4. Art.no. 044502.
17. Очиров А. А., Чашечкин Ю. Д. Двумерные периодические течения на поверхности несжимаемой жидкости в различных моделях среды // *Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана*. 2024. Т. 60. № 1. С. 3–16.
18. Chashechkin Y. D. Foundations of engineering mathematics applied for fluid flows // *Axioms*. 2021. Vol. 10, Art.no. 286
19. Кистович Ю. В., Чашечкин Ю. Д. Линейная теория распространения пучков внутренних волн в произвольно стратифицированной жидкости // *Прикладная механика и техническая физика*. 1998. Т. 39. № 5. С. 88–98. doi:10.1007/BF02468043
20. Найфэ А. Х. Введение в методы возмущений. М.: Мир. 1984.

## References

1. Lamb H., *Hydrodynamics*, Cambridge: CUP. 1932.
2. Landau L. D., Lifshitz E. M., *Fluid Mechanics. V.6. Course of Theoretical Physics*, Pergamon Press: Oxford, UK, 1987.
3. Phillips O. M., *The Dynamics of the Upper Ocean* (Second Edition), Syndics of the Cambridge University Press, England, 1977.
4. Lighthill J., *Waves in fluids*, Cambridge University Press, 1978.
5. Whitham G. B., *Linear and nonlinear waves*, Wiley-Interscience: N.-Y. USA, 1999.
6. Wu J., Deike L., Wind wave growth in the viscous regime, *Physical Review Fluids*, 2021, vol. 6.no. 9. Art.no. 094801. <https://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.6.094801>
7. Rai R. et al., A stable free-surface boundary solution method for fully nonlinear potential flow models *Applied Ocean Research*, 2023, vol. 134. Art.no. 103500. <https://doi.org/10.1016/j.apor.2023.103500>
8. Khairbekov S., Chashechkin Y., A packet of short ring-shape perturbations around a crown at the initial stage of merging of a freely falling drop with a still fluid in the impact mode, *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, 2025, vol. 26, iss. 1 [in Russian]. <http://chemphys.edu.ru/issues/2025-26-1/articles/1166/>
9. Carbonaro A. et al., Emergence of capillary waves in miscible coflowing fluids, *Physical Review Letters*, 2025, vol. 134, no. 5, Art.no. 054001. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.134.054001>
10. Hazra S. et al., Interfacial instability in a viscoelastic microfluidic coflow system, *Journal of Fluid Mechanics*, 2024, vol. 1000, Art.no. A96. doi:10.1017/jfm.2024.993
11. Aleksandrov V. A., Waveguide Waves on the Water Surface in an Open Channel with a Built-in Source and a Capillary Wave Resonator, *Technical Physics*, 2023, vol. 68, no. 8, pp. 161–170. <https://doi.org/10.1134/S1063784223700019>
12. Stan A., Symmetric Water Waves with Surface Tension: Traveling Wave Behavior and Maximal Horizontal Velocity, *Water Waves*, 2025, vol. 7, pp. 593–603. <https://doi.org/10.1007/s42286-025-00125-6>
13. Eisenberg D, Kauzmann W., *The Structure and Properties of Water* (Oxford Classic Texts in the Physical Sciences), Oxford University Press: Oxford, UK, 2005.
14. Fedorov K. N., *The Thermohaline Fine Structure of the Ocean*, Pergamon Marine Series. 1978.

15. Gerasimov V. V., Zatsepin A. G. On the Stratification of a Linearly Stratified Liquid under the Influence of Uniform Vertical Mixing (Laboratory Experiment), *Fundamental and Applied Hydrophysics*, 2025, vol. 18, no. 3, pp. 77–87 [in Russian]. [https://doi.org/10.59887/2073-6673.2025.18\(3\)-6](https://doi.org/10.59887/2073-6673.2025.18(3)-6)
16. Hu X., Cubaud T., Viscous wave breaking and ligament formation in microfluidic systems, *Physical Review Letters*, 2018, vol. 121, no. 4, Art.no. 044502. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.121.044502>
17. Ochirov A. A., Chashechkin Y. D., Two-Dimensional Surface Periodic Flows of an Incompressible Fluid in Various Models of the Medium, *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*, 2024, vol. 60, no. 1, pp. 1–14. <https://doi.org/10.1134/S0001433824700087>
18. Chashechkin Y. D., Foundations of engineering mathematics applied for fluid flows, *Axioms*, 2021, vol. 10, Art.no. 286. <https://doi.org/10.3390/axioms10040286>
19. Kistovich Yu. V., & Chashechkin Yu. D. Linear theory of beams of internal wave propagation an arbitrarily stratified liquid. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1998, vol. 39, no. 5, pp. 302–309. doi:10.1007/BF02468043
20. Nayfeh A. H., *Introduction to perturbation techniques*, N.Y.: Wiley. 1981.

Статья поступила в редакцию 22 декабря 2025 г.