

# On the Use of Two Forms of the Energy Conservation Equation for the Interpretation of Experimental Data from Aerodynamic Experiments

N. O. Kremenetsky, S. T. Surzhikov

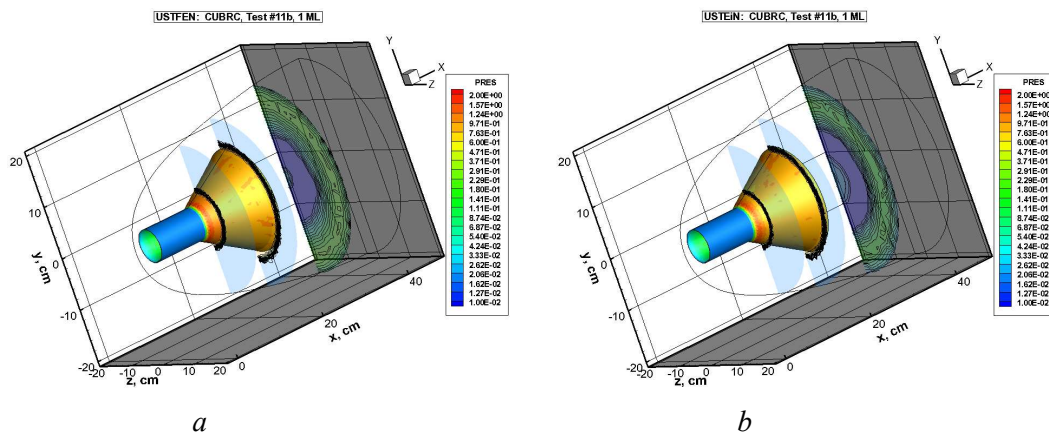
*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS,  
Moscow, 119526, Russia*

surg@ipmnet.ru

## Abstract

The results of numerical modeling of shock-wave interaction near a surface with a generatrix break are presented for bodies of three configurations, obtained on unstructured low-dimensional tetrahedral meshes. An algorithm for numerically integrating the Navier-Stokes equations is implemented and described. This algorithm includes finite-volume discretization and the use of two alternative formulations of the energy conservation equation—the total specific energy equation and the internal energy equation. Solutions obtained using both formulations are compared, their sensitivity to mesh effects is analyzed, and the characteristics near the surface of the bodies with a generatrix break are reproduced. The results are compared with experimental data.

Keywords: double cone, cylinder with a skirt, Navier-Stokes equations, equation of conservation of total specific energy, equation of conservation of specific internal energy, finite volume method



Pressure fields obtained using the equation of conservation of total (a) and internal specific energy (b)

УДК 533.92:533.6.01

# Об использовании двух форм уравнения сохранения энергии для интерпретации экспериментальных данных аэродинамических экспериментов

Н. О. Кременецкий, С. Т. Суржиков

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН,  
Россия, Москва, 119526, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1  
surg@ipmnet.ru*

## Аннотация

Представлены результаты численного моделирования ударно-волнового взаимодействия вблизи поверхности с изломом образующей для тел трех конфигураций, полученные на неструктурированных тетраэдральных сетках малой размерности. Реализован и описан алгоритм численного интегрирования системы уравнений Навье-Стокса, включающий дискретизацию по методу конечных объемов и использование двух альтернативных формулировок уравнения сохранения энергии – уравнения полной удельной энергии и уравнения внутренней энергии. Проведено сопоставление решений, полученных при использовании обеих формулировок, анализ чувствительности к сеточным эффектам и воспроизведения характеристик вблизи поверхности исследуемых тел с изломом образующей. Проведено сравнение полученных результатов с экспериментальными данными.

Ключевые слова: двойной конус, цилиндр с юбкой, уравнения Навье – Стокса, уравнение сохранения полной удельной энергии, уравнение сохранения удельной внутренней энергии, метод конечного объема

## 1. Введение

Опытные данные по структуре ударно-волнового взаимодействия вблизи поверхностей простейших геометрических конфигураций, а также по распределению давления и плотности конвективных тепловых потоков вдоль обтекаемых поверхностей [1–5], детально анализировались различными расчетными группами [6–9]. Выполненный в обзорных работах [20–23] анализ достигнутых расчетных результатов позволяет сделать вывод об удовлетворительном, в целом, согласии численных и экспериментальных данных. При этом подчеркивается, что расчеты проводились с использованием полных (NS) и параболизированных (PNS) уравнений Навье – Стокса, а также с использованием методов Монте-Карло (DSMC). При интерпретации результатов ударно-волнового взаимодействия с турбулентными пограничными слоями хорошие результаты показали RANS-модели. Однако, во всех работах по численному моделированию отмечается принципиальная важность тщательного выбора топологии и подробности используемых расчетных сеток. Кроме этого, выполненные исследования по использованию различных модификаций конечно-разностных и конечно-объемных расчетных методов также показали важность тщательного анализа расчетных методов для получения удовлетворительного описания экспериментальных данных. В этой связи отметим, что в указанных работах практически не было использования неструктурированных конечно-объемных сеток. Это легко объясняется тем, что использование таких сеток представляется неэффективным для решения обсуждаемых задач, требующих, как правило, разрешения тонких газодинамических структур

ударно-вязкого взаимодействия. Однако использование неструктурированных сеток все же имеет научный и практический интерес. Это может оказаться оправданным при анализе ударно-волновых процессов вблизи элементов поверхностей, имеющих сложную форму. Также, решение задач на неструктурированных расчетных сетках стимулирует развитие параллельных и инновационных алгоритмов. Представляет также практический интерес отработка расчетных алгоритмов, ориентированных на использование неструктурированных сеток.

В данной работе на примере расчета обтекания трех лабораторных моделей, исследованных в [4], реализуются следующие две задачи:

- Использование неструктурированных тетраэдральных сеток малой размерности для оценки распределения давления вдоль поверхности острого и затупленного двойного конуса, а также внешней поверхности полого цилиндра с юбкой, с последующим сопоставлением указанных распределений с экспериментальными данными;
- Использование двух форм уравнения сохранения энергии для численного интегрирования уравнений газовой динамики на неструктурированных тетраэдральных расчетных сетках.

Размеры исследуемых аэродинамических моделей и условия в набегающем потоке соответствуют приведенным в [4].

## 2. Система интегрируемых уравнений

Для решения задачи обтекания тестовых моделей и формулировки расчетного алгоритма используется полная система уравнений однородного, вязкого, теплопроводного, сжимаемого газа, записанная в векторно-матричном виде

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{F}_{\rho V}^x + \mathbf{F}_p^x - \mathbf{T}_\tau^x) + \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{F}_{\rho V}^y + \mathbf{F}_p^y - \mathbf{T}_\tau^y) + \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{F}_{\rho V}^z + \mathbf{F}_p^z - \mathbf{T}_\tau^z) = \mathbf{R}, \quad (1)$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho [e + 0.5(u^2 + v^2 + w^2)] \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho f_x \\ \rho f_y \\ \rho f_z \\ Q_\Sigma \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$\mathbf{F}_{\rho V}^x = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 \\ \rho u v \\ \rho u w \\ \rho u E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_{\rho V}^y = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho v u \\ \rho v^2 \\ \rho v w \\ \rho v E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_{\rho V}^z = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho w u \\ \rho w v \\ \rho w^2 \\ \rho w E \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$\mathbf{F}_p^x = \begin{bmatrix} 0 \\ p \\ 0 \\ 0 \\ \rho u + q_x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_p^y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p \\ 0 \\ \rho v + q_y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_p^z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ p \\ \rho w + q_z \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$\mathbf{T}_\tau^x = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_\tau^y = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yz} \\ u\tau_{yx} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_\tau^z = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \tau_{zz} \\ u\tau_{zx} + v\tau_{zy} + w\tau_{zz} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где  $u, v, w$  – проекции скорости  $\mathbf{V}$  на координатные оси  $x, y, z$ ;  $\rho, p$  – плотность и давление;  $E = e + V^2/2$  – полная удельная внутренняя энергия единицы объема;  $e$  – удельная внутренняя энергия;  $f_x, f_y, f_z$  – массовые объемные силы;  $q_x, q_y, q_z$  – проекции вектора плотности теплового потока  $\mathbf{q}$  на координатные оси;  $Q_\Sigma$  – объемные источники тепловыделения;  $\tau_{ij}$  – компоненты тензора вязких напряжений, являющиеся составными частями компонентов тензора напряжений

$$\Pi_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}, \quad (6)$$

где  $\delta_{ij}$  – дельта-символ Кронекера ( $\delta_{ij} = 1$ , если  $i = j$ ;  $\delta_{ij} = 0$ , если  $i \neq j$ ).

В покомпонентной записи они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= \frac{2}{3}\mu \left[ 2\frac{\partial u}{\partial x} - \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right], & \tau_{yy} &= \frac{2}{3}\mu \left[ 2\frac{\partial v}{\partial y} - \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right], \\ \tau_{zz} &= \frac{2}{3}\mu \left[ 2\frac{\partial w}{\partial z} - \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right], & \tau_{xy} = \tau_{yx} &= \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} &= \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), & \tau_{yz} = \tau_{zy} &= \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (7)$$

Используется термодинамическая модель совершенного газа, поэтому термическое и калорическое уравнения состояния формулируется в виде:

$$p = (\gamma - 1)\rho e, \quad e = c_V T, \quad (8)$$

где  $T$  – температура;  $c_V$  – удельная теплоемкость при постоянном объеме;  $\gamma = 1.4$  – показатель адиабаты.

При интегрировании уравнений движения невязкого и нетеплопроводного газа компоненты тензора вязких напряжений и теплового потока полагались равными нулю.

Остановимся на концепции использования полной системы уравнений (1)–(7) в расчетах обтекания тестовых моделей с целью сравнения с экспериментальными данными [4]. В данном случае целесообразнее использовать Эйлерову модель течения. Очевидно, что использование неструктурированных сеток малой размерности не позволяет разрешить как пограничные слои вблизи поверхностей, так и структуру ударно-волнового взаимодействия. Значит, рассчитывать на адекватную оценку плотностей поверхностных тепловых потоков к обтекаемой поверхности не приходится. Однако, при повышении размерности неструктурированной сетки с соответствующим ее сжатием к поверхности появляется реальная возможность адекватной оценки плотности конвективных тепловых потоков.

Предварительные исследования показали, что для изучаемых в данной работе тестовых моделей размерность тетраэдральной сетки должна составлять порядка 50 миллионов элементарных объемов. В данной работе используются сетки от 1 до 7 миллионов.

Необходимо также пояснить, что, как будет показано в качестве примера в данной работе, тетраэдральная сетка в расчетной области не может быть слишком неоднородной, когда вблизи поверхности реализуется сильное сгущение за счет значительного разрежения в

остальной области. Ранее было показано, что слишком грубое описание ударно-волновой структуры также приводит к ошибочным результатам. Однако, с вычислительной точки зрения, использование модели Навье – Стокса, а значит соответствующих граничных условий на поверхности (в первую очередь, условий прилипания) обеспечивает большую устойчивость численной процедуры, в особенности в областях отрывного течения, где, как правило, плотность конвективных тепловых потоков мала. При этом оказывается, что распределение давления вдоль поверхности предсказывается с удовлетворительной точностью.

Таким образом, граничные условия для компонент скорости формулировались либо в форме прилипания, либо в форме проскальзывания (нормальная компонента скорости равна нулю). Далее полагаем компоненты векторной функции  $\mathbf{R}(2)$  равными нулю.

### 3. Алгоритм численного интегрирования

Использовался двухшаговый алгоритм интегрирования системы уравнений (1). Для удобства формулировки алгоритма представим (1) в следующем символическом виде (фактически используется схема расщепления по физическим процессам), вводя шаг интегрирования по времени  $\tau$

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{U}^{p+1} - \tilde{\mathbf{U}}}{\tau} + \frac{\tilde{\mathbf{U}} - \mathbf{U}^p}{\tau} + \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{F}_{\rho V}^x) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{F}_{\rho V}^y) + \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{F}_{\rho V}^z) + \\ + \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{F}_p^x - \mathbf{T}_\tau^x) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{F}_p^y - \mathbf{T}_\tau^y) + \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{F}_p^z - \mathbf{T}_\tau^z) = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Тогда, на первом этапе расчетов (на шаге «предиктор») для компонент скорости и полной удельной энергии формулируется уравнение

$$\frac{\tilde{\mathbf{U}} - \mathbf{U}^p}{\tau} + \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{F}_p^x - \mathbf{T}_\tau^x) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{F}_p^y - \mathbf{T}_\tau^y) + \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{F}_p^z - \mathbf{T}_\tau^z) = 0, \quad (10)$$

а на втором этапе расчетов (на шаге «корректор») используется уравнение, включающее найденные компоненты скорости и предварительно определенной удельной полной энергии

$$\frac{\mathbf{U}^{p+1} - \tilde{\mathbf{U}}}{\tau} + \frac{\partial}{\partial x}(\tilde{\mathbf{F}}_{\rho V}^x) + \frac{\partial}{\partial y}(\tilde{\mathbf{F}}_{\rho V}^y) + \frac{\partial}{\partial z}(\tilde{\mathbf{F}}_{\rho V}^z) = 0 \quad (11)$$

Покомпонентная запись формул для шага «предиктор»

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= u^p - \frac{\tau}{\rho^p} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\tau}{\rho^p} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right), \\ \tilde{v} &= v^p - \frac{\tau}{\rho^p} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\tau}{\rho^p} \left( \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right), \\ \tilde{w} &= w^p - \frac{\tau}{\rho^p} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\tau}{\rho^p} \left( \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right), \\ \tilde{E} &= E^p - \frac{\tau}{\rho^p} \left( \frac{\partial p u}{\partial x} + \frac{\partial p v}{\partial y} + \frac{\partial p w}{\partial z} \right) + \frac{\tau}{\rho^p} \left( \frac{\partial T_{\tau,5}^x}{\partial x} + \frac{\partial T_{\tau,5}^y}{\partial y} + \frac{\partial T_{\tau,5}^z}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad (12)$$

где  $T_{\tau,5}^x = u\tau_{xx} + v\tau_{yx} + w\tau_{zx}$ ,  $T_{\tau,5}^y = u\tau_{xy} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz}$ ,  $T_{\tau,5}^z = u\tau_{xz} + v\tau_{yz} + w\tau_{zz}$ .

Давление и компоненты тензора вязких напряжений рассчитываются на нижнем временном слое « $p$ ». Заметим, что на этапе «предиктор» плотность не изменяется, то есть полагается,

что значения искомых функций (12) изменяются только за счет действия «силовых» факторов. Заметим, что качественная трактовка такой двухшаговой схемы использовалась ранее в методе крупных частиц [24].

На этапе «корректора» сначала рассчитывается новое значение плотности

$$\rho^{p+1} = \rho^p - \tau \left( \frac{\partial \rho^p \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \rho^p \tilde{v}}{\partial x} + \frac{\partial \rho^p \tilde{w}}{\partial x} \right), \quad (13)$$

а затем – остальных функций

$$\mathbf{U}^{p+1} = \tilde{\mathbf{U}} - \tau \left( \frac{\partial F_{\tilde{\rho}\tilde{v}}^x}{\partial x} + \frac{\partial F_{\tilde{\rho}\tilde{v}}^y}{\partial y} + \frac{\partial F_{\tilde{\rho}\tilde{v}}^z}{\partial z} \right) \quad (14)$$

или

$$\begin{aligned} u^{p+1} &= \frac{\rho^p}{\rho^{p+1}} \tilde{u} - \frac{\tau}{\rho^{p+1}} \left( \frac{\partial \rho^p \tilde{u}\tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \rho^p \tilde{u}\tilde{v}}{\partial y} + \frac{\partial \rho^p \tilde{u}\tilde{w}}{\partial z} \right), \\ \tilde{v}^{p+1} &= \frac{\rho^p}{\rho^{p+1}} \tilde{v} - \frac{\tau}{\rho^{p+1}} \left( \frac{\partial \rho^p \tilde{v}\tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \rho^p \tilde{v}\tilde{v}}{\partial y} + \frac{\partial \rho^p \tilde{v}\tilde{w}}{\partial z} \right), \\ \tilde{w}^{p+1} &= \frac{\rho^p}{\rho^{p+1}} \tilde{w} - \frac{\tau}{\rho^{p+1}} \left( \frac{\partial \rho^p \tilde{w}\tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \rho^p \tilde{w}\tilde{v}}{\partial y} + \frac{\partial \rho^p \tilde{w}\tilde{w}}{\partial z} \right), \\ E^{p+1} &= \frac{\rho^p}{\rho^{p+1}} \tilde{E} - \frac{\tau}{\rho^{p+1}} \left( \frac{\partial \rho^p \tilde{E}\tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \rho^p \tilde{E}\tilde{v}}{\partial y} + \frac{\partial \rho^p \tilde{E}\tilde{w}}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (15)$$

Отметим важную особенность представленных систем уравнений (7)–(13), состоящую в том, что все компоненты этих уравнений, кроме производных по времени, носят дивергентный характер. В следующем разделе будет показано, что это позволяет естественным образом построить конечно-объемные расчетные соотношения, приводящие, однако, к необходимости использовать некоторые (известные в теории численных методов) приближенные соотношения для определения значений искомых функций на границах элементарных объемов.

#### 4. Формулировка трехмерного численного конечно-объемного метода для тетраэдральной сетки

В данном разделе будут представлены расчетные соотношения для конечно-объемного представления функций и их производных применительно к тетраэдральному элементарному объему. Расчетные соотношения метода конечного объема получаются интегрированием (9) и (10) по объему выделенной в пространстве элементарной расчетной ячейки (в нашем случае – тетраэдра).

Напомним, что по теореме Гаусса – Остроградского для произвольной векторной функции  $\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$  имеем

$$\begin{aligned} \int_{W_L} \operatorname{div} \mathbf{A} dW &= \int_{W_L} \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dW = \oint_{S_L} \mathbf{A} d\mathbf{S} = \oint_{S_L} (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) (\mathbf{i} dS_x + \mathbf{j} dS_y + \mathbf{k} dS_z) = \\ &= \oint_{S_L} A_x dS_x + \oint_{S_L} A_y dS_y + \oint_{S_L} A_z dS_z, \end{aligned} \quad (16)$$

где  $W_L, S_L$  – объем и поверхность выделенной ячейки  $L$ ;  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  – единичные орты прямоугольной декартовой системы координат.

В силу независимости функций  $A_x, A_y, A_z$  можем положить

$$\int_{W_L} \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} \right) dW = \oint_S A_x dS_x, \quad \int_{W_L} \left( \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dW = \oint_S A_y dS_y, \quad \int_{W_L} \left( \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dW = \oint_S A_z dS_z, \quad (17)$$

где  $W_L, S_L$  объем и поверхность выделенной ячейки, которой присвоен индекс  $L$ ;  $dS_x, dS_y, dS_z$  – проекции элементарной площади  $dS$  на плоскости, перпендикулярные осям  $x, y, z$ ; они определяются по формулам

$$dS_x = \omega_{n,x} dS, \quad dS_y = \omega_{n,y} dS, \quad dS_z = \omega_{n,z} dS, \quad (18)$$

где  $\omega_{n,x}, \omega_{n,y}, \omega_{n,z}$  – направляющие косинусы внешней нормали к элементу поверхности по отношению к координатным осям  $x, y, z$ .

Отсюда следует способ расчета усредненных по объему производных

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle_{W_L} = \frac{1}{W_L} \int_{W_L} \frac{\partial f}{\partial x} dW = \frac{1}{W_L} \oint_{S_L} f \mathbf{i} dS \approx \frac{1}{W_L} \sum_{j=1}^4 f_L S_{L_j} \omega_x^{L_j} \approx \frac{1}{W_L} \sum_{j=1}^4 \frac{1}{2} (f_L + f_{LB_j}) S_{L_j} \omega_x^{L_j} \quad (19)$$

Интегрирование по поверхности  $S_L$  элементарного объема  $L$  проводится для функций  $f$  вдоль граней объема  $j$ , (площадью  $S_{L_j}$ ). Использование полу суммы значений вблизи данной ( $L$ ) и соседней ячейки ( $LB_j$ ) указано здесь в качестве простейшего примера определения функций на гранях.

Фактические значения искомых функций находятся при решении так называемой задачи о распаде произвольного разрыва. Пионерская работа по решению данной задачи была выполнена С. К. Годуновым [25]. Оказалось, что весьма экономичным приближенным методом этой задачи является семейство методов AUSM [26], пример использования которого для неструктурированных сеток приведен в [27].

По аналогии

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle_{W_L} = \frac{1}{W_L} \int_{W_L} \frac{\partial f}{\partial y} dW = \frac{1}{W_L} \oint_{S_L} f \mathbf{j} dS \approx \frac{1}{W_L} \sum_{j=1}^4 f_L S_{L_j} \omega_y^{L_j} \approx \frac{1}{W_L} \sum_{j=1}^4 \frac{1}{2} (f_L + f_{LB_j}) S_{L_j} \omega_y^{L_j}, \quad (20)$$

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial z} \right\rangle_{W_L} = \frac{1}{W_L} \int_{W_L} \frac{\partial f}{\partial z} dW = \frac{1}{W_L} \oint_{S_L} f \mathbf{k} dS \approx \frac{1}{W_L} \sum_{j=1}^4 f_L S_{L_j} \omega_z^{L_j} \approx \frac{1}{W_L} \sum_{j=1}^4 \frac{1}{2} (f_L + f_{LB_j}) S_{L_j} \omega_z^{L_j} \quad (21)$$

Аналогично определяются усредненные по объему  $W_L$  производные компонент тензора вязких напряжений

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \tau_{pq}}{\partial x} \right\rangle_{W_L} &\approx \frac{1}{W_L} \sum_{j=1}^4 \frac{1}{2} (\langle \tau_{pq}^L \rangle + \langle \tau_{pq}^{LB_j} \rangle) S_{L_j} \omega_x^{L_j}, \\ \left\langle \frac{\partial \tau_{pq}}{\partial y} \right\rangle_{W_L} &\approx \frac{1}{W_L} \sum_{j=1}^4 \frac{1}{2} (\langle \tau_{pq}^L \rangle + \langle \tau_{pq}^{LB_j} \rangle) S_{L_j} \omega_y^{L_j}, \\ \left\langle \frac{\partial \tau_{pq}}{\partial z} \right\rangle_{W_L} &\approx \frac{1}{W_L} \sum_{j=1}^4 \frac{1}{2} (\langle \tau_{pq}^L \rangle + \langle \tau_{pq}^{LB_j} \rangle) S_{L_j} \omega_z^{L_j} \end{aligned} \quad (22)$$

Усредненные компоненты тензора вязких напряжений рассчитываются с использованием выражений для усредненных значений производных компонент скорости

$$\begin{aligned}
 \langle \tau_{xx}^L \rangle &\approx \frac{2}{3} \mu_L \left[ 2 \left\langle \frac{\partial u}{\partial x} \right\rangle_L - \left( \left\langle \frac{\partial v}{\partial y} \right\rangle_L + \left\langle \frac{\partial w}{\partial z} \right\rangle_L \right) \right], \\
 \langle \tau_{yy}^L \rangle &\approx \frac{2}{3} \mu_L \left[ 2 \left\langle \frac{\partial v}{\partial y} \right\rangle_L - \left( \left\langle \frac{\partial u}{\partial x} \right\rangle_L + \left\langle \frac{\partial w}{\partial z} \right\rangle_L \right) \right], \\
 \langle \tau_{zz}^L \rangle &\approx \frac{2}{3} \mu_L \left[ 2 \left\langle \frac{\partial w}{\partial z} \right\rangle_L - \left( \left\langle \frac{\partial u}{\partial x} \right\rangle_L + \left\langle \frac{\partial v}{\partial y} \right\rangle_L \right) \right], \\
 \langle \tau_{xy}^L \rangle = \langle \tau_{yx}^L \rangle &\approx \mu_L \left[ \left\langle \frac{\partial u}{\partial y} \right\rangle_L + \left\langle \frac{\partial v}{\partial x} \right\rangle_L \right], \\
 \langle \tau_{xz}^L \rangle = \langle \tau_{zx}^L \rangle &\approx \mu_L \left[ \left\langle \frac{\partial w}{\partial x} \right\rangle_L + \left\langle \frac{\partial u}{\partial z} \right\rangle_L \right], \\
 \langle \tau_{yz}^L \rangle = \langle \tau_{zy}^L \rangle &\approx \mu_L \left[ \left\langle \frac{\partial v}{\partial z} \right\rangle_L + \left\langle \frac{\partial w}{\partial y} \right\rangle_L \right]
 \end{aligned} \tag{23}$$

Заметим, что для повышения точности аппроксимации усредненных по объему компонент тензора вязких напряжений можно использовать аппроксимационные соотношения, связывающие функции в соседних ячейках (см., например, [29]). Однако применительно к классу решаемых задач такой подход требует дополнительных исследований.

Для завершения вычислений осталось определить средние производные компонент скорости

$$\left\langle \frac{\partial V_p}{\partial x_q} \right\rangle_{W_L} \approx \frac{1}{W_L} \sum_{j=1}^4 \frac{1}{2} (V_{p,L} + V_{p,LB_j}) S_{L_j} \omega_q^{L_j}, \tag{24}$$

где  $V_p = u, v, w$ ;  $p, q = x, y, z$ .

## 5. Реализация численного алгоритма

Приведем пример получения расчетных соотношений для определения функций  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{v}$ ,  $\tilde{w}$ ,  $\tilde{E}$ . С целью нахождения промежуточного значения  $\tilde{u}$  в элементарном тетраэдре с номером  $L$  выберем 2-ю строку в векторе функции (2)  $\mathbf{U}$  и запишем для нее скалярное уравнение

$$\rho_L^p \frac{\tilde{u}_L - u_L^p}{\tau} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \tag{25}$$

Интегрируя по объему  $W_L$ , получаем

$$W_L \rho_L^p \frac{\tilde{u}_L - u_L^p}{\tau} = - \int_{W_L} \frac{\partial p}{\partial x} dW + \int_{W_L} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} dW + \int_{W_L} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dW + \int_{W_L} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dW \tag{26}$$

Выше были определены формулы интегрирования по элементарному тетраэдральному объему, в соответствии с которыми

$$\begin{aligned}
 \tilde{u}_L = u_L^p - \frac{\tau}{\rho^p W_L} &\left[ \sum_{j=1}^4 S_{L_j} \omega_x^{L_j} \frac{1}{2} (p_L + p_{LB_j}) \right] + \\
 &+ \frac{\tau}{\rho^p W_L} \left[ \sum_{j=1}^4 S_{L_j} \omega_x^{L_j} \frac{1}{2} (\langle \tau_{xx}^L \rangle + \langle \tau_{xx}^{LB_j} \rangle) + S_{L_j} \omega_y^{L_j} \frac{1}{2} (\langle \tau_{xy}^L \rangle + \langle \tau_{xy}^{LB_j} \rangle) + S_{L_j} \omega_z^{L_j} \frac{1}{2} (\langle \tau_{xz}^L \rangle + \langle \tau_{xz}^{LB_j} \rangle) \right], \tag{27}
 \end{aligned}$$

где  $\omega_x^{L_j}$  – единичный орт оси  $x$  прямоугольной декартовой системы координат и направляющий косинус единичной внешней нормали к грани  $j$  элемента  $L$ ;  $S_{L_j}$  – площадь  $j$ -й грани элемента  $L$ ;  $\langle \tau^L \rangle, \langle \tau^{LB_j} \rangle$  – усредненные значения компонент тензора напряжений в элементе  $L$  и в элементе  $LB_j$ , граничащим с элементом  $L$  через грань  $L_j$ .

$$\begin{aligned} \tilde{v}_L = v_L^p - \frac{\tau}{\rho^p W_L} \left[ \sum_{j=1}^4 S_{L_j} \omega_y^{L_j} \frac{1}{2} (p_L + p_{LB_j}) \right] + \\ + \frac{\tau}{\rho^p W_L} \left[ \sum_{j=1}^4 S_{L_j} \omega_x^{L_j} \frac{1}{2} (\langle \tau_{xy}^L \rangle + \langle \tau_{xy}^{LB_j} \rangle) + S_{L_j} \omega_y^{L_j} \frac{1}{2} (\langle \tau_{yy}^L \rangle + \langle \tau_{yy}^{LB_j} \rangle) + S_{L_j} \omega_z^{L_j} \frac{1}{2} (\langle \tau_{yz}^L \rangle + \langle \tau_{yz}^{LB_j} \rangle) \right], \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \tilde{w}_L = w_L^p - \frac{\tau}{\rho^p W_L} \left[ \sum_{j=1}^4 S_{L_j} \omega_z^{L_j} \frac{1}{2} (p_L + p_{LB_j}) \right] + \\ + \frac{\tau}{\rho^p W_L} \left[ \sum_{j=1}^4 S_{L_j} \omega_x^{L_j} \frac{1}{2} (\langle \tau_{xz}^L \rangle + \langle \tau_{xz}^{LB_j} \rangle) + S_{L_j} \omega_y^{L_j} \frac{1}{2} (\langle \tau_{yz}^L \rangle + \langle \tau_{yz}^{LB_j} \rangle) + S_{L_j} \omega_z^{L_j} \frac{1}{2} (\langle \tau_{zz}^L \rangle + \langle \tau_{zz}^{LB_j} \rangle) \right], \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \tilde{E} = E^p - \frac{\tau}{\rho^p W_L} \left[ \sum_{j=1}^4 S_{L_j} \omega_x^{L_j} \frac{1}{2} (p_L u_L + p_{LB_j} u_{LB_j}) + S_{L_j} \omega_y^{L_j} \frac{1}{2} (p_L v_L + p_{LB_j} v_{LB_j}) \right. \\ \left. + S_{L_j} \omega_z^{L_j} \frac{1}{2} (p_L v_L + p_{LB_j} v_{LB_j}) \right] + \\ + \frac{\tau}{\rho^p W_L} \left[ \sum_{j=1}^4 S_{L_j} \omega_x^{L_j} \frac{1}{2} (T_{\tau,5,L_j}^x + T_{\tau,5,LB_j}^x) + S_{L_j} \omega_y^{L_j} \frac{1}{2} (T_{\tau,5,L_j}^y + T_{\tau,5,LB_j}^y) \right. \\ \left. + S_{L_j} \omega_z^{L_j} \frac{1}{2} (T_{\tau,5,L_j}^z + T_{\tau,5,LB_j}^z) \right], \end{aligned} \quad (30)$$

где функции  $T_{\tau,5,L_j}^p$  рассчитываются по формулам

$$\begin{aligned} T_{\tau,5,L_j}^x &= \tilde{u}_L \langle \tau_{xx}^L \rangle + \tilde{v}_L \langle \tau_{yx}^L \rangle + \tilde{w}_L \langle \tau_{zx}^L \rangle, \\ T_{\tau,5,L_j}^y &= \tilde{u}_L \langle \tau_{xy}^L \rangle + \tilde{v}_L \langle \tau_{yy}^L \rangle + \tilde{w}_L \langle \tau_{yz}^L \rangle, \\ T_{\tau,5,L_j}^z &= \tilde{u}_L \langle \tau_{xz}^L \rangle + \tilde{v}_L \langle \tau_{yz}^L \rangle + \tilde{w}_L \langle \tau_{zz}^L \rangle \end{aligned} \quad (31)$$

После определения промежуточных значений компонент скорости можно обратиться к предварительному решению уравнения неразрывности

$$\int_{W_L} \frac{\partial \rho}{\partial t} dW + \int_{W_L} \text{div}(\rho \tilde{\mathbf{V}}) dW = 0, \quad (32)$$

или

$$\frac{\rho_L^{p+1} - \rho_L^p}{\tau} W_L + \oint_{S_L} \rho \tilde{\mathbf{V}}_L d\mathbf{S} = 0,$$

или

$$\frac{\rho_L^{p+1} - \rho_L^p}{\tau} W_L + \sum_{j=1}^4 S_{L_j} G_{L_j} = 0 \quad (33)$$

Если  $\mathbf{\Omega}_{S_L}$  – единичный вектор внешней нормали к элементу поверхности  $dS$ , то при положительной величине плотности потока через элемент поверхности  $dS$

$$G_{L,dS} = \rho(\tilde{\mathbf{V}}_{S_L} \cdot \mathbf{\Omega}_{S_L}) > 0$$

газ из объема вытекает, а при  $G_{L,dS} < 0$  газ втекает в объем.

При конечно-разностном представлении

$$\rho_L^{p+1} = \rho_L^p - \frac{\tau}{W_L} \sum_{j=1}^4 S_{L_j} \rho_{L_j} \tilde{V}_{S_{L_j}}, \quad (34)$$

$$\rho_{L_j} = \begin{cases} \rho_L^p, & \tilde{V}_{S_{L_j}} > 0, \\ \rho_{LB_j}^p, & \tilde{V}_{S_{L_j}} < 0, \end{cases}$$

где  $\tilde{V}_{S_{L_j}}$  – нормальная скорость к грани  $j$ .

Расчет величины  $\tilde{V}_{S_{L_j}}$  требует использования некоторых дополнительных соображений.

Один из простейших способов состоит в следующем. Учитывая, что на шаге предиктора были найдены усредненные по элементарным объемам компоненты скорости  $\tilde{u}_L, \tilde{v}_L, \tilde{w}_L$ , с их использованием находится искомая нормальная компонента скорости

$$\tilde{V}_{S_{L_j}} = \tilde{u}_L \omega_{S_{L_j}}^x + \tilde{v}_L \omega_{S_{L_j}}^y + \tilde{w}_L \omega_{S_{L_j}}^z$$

По аналогии, для нормальной компоненты скорости на той же самой грани соседнего объема

$$\tilde{V}_{LB_j} = -\tilde{u}_{LB_j} \omega_{S_{L_j}}^x - \tilde{v}_{LB_j} \omega_{S_{L_j}}^y - \tilde{w}_{LB_j} \omega_{S_{L_j}}^z$$

Заметим, что направляющие косинусы в данном случае по-прежнему определяют внешнюю нормаль к граням объема  $L$ .

Для удобства вычислений вводим две вспомогательных величины

$$\tilde{V}_{S_{L_j}}^+ = \frac{1}{2}(\tilde{V}_{S_{L_j}} + |\tilde{V}_{S_{L_j}}|), \quad \tilde{V}_{S_{L_j}}^- = \frac{1}{2}(\tilde{V}_{S_{L_j}} - |\tilde{V}_{S_{L_j}}|)$$

Тогда соотношение (34) может быть записано в виде

$$\rho_L^{p+1} = \rho_L^p - \frac{\tau}{W_L} \sum_{j=1}^4 S_{L_j} (\rho_{L_j} \tilde{V}_{S_{L_j}}^+ + \rho_{LB_j} \tilde{V}_{S_{L_j}}^-) \quad (35)$$

По этой же схеме производится расчет компонент скорости и полной энергии на заключительном этапе корректора

$$u_L^{p+1} = \tau \frac{\rho_L^p}{\rho_L^{p+1}} \tilde{u}_L - \frac{\tau}{\rho_L^{p+1}} \sum_{j=1}^4 S_{L_j} (\rho_{L_j} \tilde{u}_L \tilde{V}_{S_{L_j}}^+ + \rho_{LB_j} \tilde{u}_{LB_j} \tilde{V}_{S_{L_j}}^-), \quad (36)$$

$$v_L^{p+1} = \tau \frac{\rho_L^p}{\rho_L^{p+1}} \tilde{v}_L - \frac{\tau}{\rho_L^{p+1}} \sum_{j=1}^4 S_{L_j} (\rho_{L_j} \tilde{v}_L \tilde{V}_{S_{L_j}}^+ + \rho_{LB_j} \tilde{v}_{LB_j} \tilde{V}_{S_{L_j}}^-), \quad (37)$$

$$E_L^{p+1} = \tau \frac{\rho_L^p}{\rho_L^{p+1}} \tilde{E}_L - \frac{\tau}{\rho_L^{p+1}} \sum_{j=1}^4 S_{L_j} (\rho_{L_j} \tilde{V}_{S_{L_j}}^+ \tilde{E}_L + \rho_{LB_j} \tilde{V}_{S_{L_j}}^- \tilde{E}_{LB_j}) \quad (38)$$

## 6. Использование уравнения сохранения удельной внутренней энергии

Главным достоинством сформулированной системы уравнений (1)–(5) является полная консервативность в смысле определения [29]. Аккуратное интегрирование данной системы уравнений относительно полной удельной энергии  $E = e + 0.5(u^2 + v^2 + w^2)$  обеспечивает сохранение этой величины.

Однако, у данной формулировки есть известный недостаток, связанный с возможностью получения нефизичной отрицательной удельной внутренней энергии, что весьма вероятно, например, в отрывных течениях сверхзвуковых потоков. Это, чаще всего, связано с погрешностью, накапливаемой при решении указанных уравнений движения и сохранения полной удельной энергии в особенности на промежуточных этапах итерационного процесса.

Существует ряд способов, позволяющих исключить получение отрицательной величины удельной внутренней энергии. Один из них состоит в использовании временных искусственных ограничителей, например давления. Потеря свойства консервативности полной энергии не всегда является фатальной при аккуратном самосогласованном решении полной системы уравнений.

Представляет научный интерес изучение возможности использования уравнения для внутренней энергии. Рассмотрим особенности интегрирования системы уравнений движения с использованием уравнения сохранения удельной внутренней энергии, записанного в векторно-матричном виде

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial z} = \mathbf{R}, \quad (39)$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho f_x \\ \rho f_y \\ \rho f_z \\ \Phi_\mu - p \cdot \text{div} \mathbf{V} + Q_\Sigma \end{bmatrix}, \quad (40)$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u v \\ \rho u w \\ \rho u e + q_x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho v u \\ \rho v^2 + p \\ \rho v w \\ \rho v e + q_y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yz} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho w u \\ \rho w v \\ \rho w^2 + p \\ \rho w e + q_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \tau_{zz} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (41)$$

$$\Phi_\mu = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau}_{ij} \cdot \mathbf{V}) - (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_{ij}) \cdot \mathbf{V} - \text{диссипативная функция} \quad (42)$$

или

$$\Phi_\mu = \mu \left[ 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right]$$

Способ перехода от системы уравнений (1)–(5) к системе (39)–(42) для удельной внутренней энергии описан в [30, 31]. Пример использования системы (39)–(42) дан в работе [32].

Это уравнение в векторном виде

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho e \mathbf{V}) = -\operatorname{div}(\mathbf{q}) + \Phi_\mu - p \operatorname{div}(\mathbf{V}) \quad (43)$$

Заметим, что последнее слагаемое в этом уравнении является принципиально важным в сверхзвуковых течениях, в особенности при отсутствии заметных тепловых потоков и малой диссипации. Можно предложить еще одну математически эквивалентную формулировку

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho e \mathbf{V}) = -\operatorname{div}(\mathbf{q}) + \Phi_\mu - \operatorname{div}(p \mathbf{V}) + \mathbf{V} \operatorname{grad}(p) \quad (44)$$

Для совершенного газа с термическим уравнением состояния совершенного газа получаем еще одну эквивалентную формулировку

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho e \mathbf{V}) = -\operatorname{div}(\mathbf{q}) + \Phi_\mu - (\gamma - 1)(\rho e) \operatorname{div}(\mathbf{V}) \quad (45)$$

или

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \gamma \operatorname{div}(\rho e \mathbf{V}) = -\operatorname{div}(\mathbf{q}) + \Phi_\mu - (\gamma - 1) \mathbf{V} \operatorname{grad}(\rho e) \quad (46)$$

Заметим, что использование приближенных конечно-объемных методов решения может привести к некоторым различиям получаемых по представленным соотношениям решениям и способы их минимизации являются основным предметом данного исследования. Представленные формулировки допускают значительное многообразие расчетных алгоритмов. Расчетные данные приведенные ниже получены с использованием одного из возможных алгоритмов:

$$\begin{aligned} \tilde{e}_L &= e_L^p + \frac{\tau}{\rho^p W_L} \left[ u_L \sum_{j=1}^4 S_{L_j} \omega_{L_j}^x \frac{1}{2} (p_L + p_{LB_j}) + \right. \\ &\quad \left. + v_L \sum_{j=1}^4 S_{L_j} \omega_{L_j}^y \frac{1}{2} (p_L + p_{LB_j}) + w_L \sum_{j=1}^4 S_{L_j} \omega_{L_j}^z \frac{1}{2} (p_L + p_{LB_j}) \right], \\ \tilde{e}_L &= e_L^p + \frac{\tau}{\rho^p W_L} \sum_{j=1}^4 S_{L_j} \omega_{L_j}^x p_{LB_j} \frac{1}{2} (u_L + u_{LB_j}) + \\ &\quad + \frac{\tau}{\rho^p W_L} \sum_{j=1}^4 S_{L_j} \omega_{L_j}^y p_{LB_j} \frac{1}{2} (v_L + v_{LB_j}) + \frac{\tau}{\rho^p W_L} \sum_{j=1}^4 S_{L_j} \omega_{L_j}^z p_{LB_j} \frac{1}{2} (w_L + w_{LB_j}) \quad (47) \end{aligned}$$

## 7. Результаты расчетов

Сравнение численных данных, полученных по двум расчетным моделям, использующих уравнения сохранения удельной полной и внутренней энергии проводилось на примере экспериментальных данных [4] по обтеканию трех тестовых моделей. Геометрия исследованных моделей и примеры использованных в данной работе расчетных сеток приведены на рис. 1–3. В работе [4] для идентификации указанных экспериментов задавались уникальные обозначения (Run#35a, Run#31, Run#11b), которые использовались также многими авторами [8–12, 14–16, 18], тестирующими свои коды на примере указанных опытных данных. Исходные данные в набегающем на модели газе приведены в таблице 1, где  $T_0$  – температура торможения,  $\rho_\infty$ ,  $p_\infty$  – давление и плотность в набегающем потоке.

Главной целью выполненного исследования, как уже отмечалось, является изучение различий в численных результатах, полученных с использованием двух форм уравнения сохранения энергии. При этом, как уже отмечалось, расчеты выполнены с использованием различных сеток не большой размерности.

Таблица 1

Исходные данные для расчетов обтекания тестовых моделей [4]

Используемая модель	Обозначение тестового варианта	$T_0$ , К	$\rho_\infty$ , г/см <sup>3</sup>	$p_\infty$ , эрг/см <sup>3</sup>
Двойной острый конус	Run#35a	3320	185.5	$0.608 \times 10^{-6}$
Двойной затупленный конус	Run#31	2420	180.6	$0.567 \times 10^{-6}$
Прямой цилиндр с юбкой	Run#11b	3100	171.9	$0.587 \times 10^{-6}$

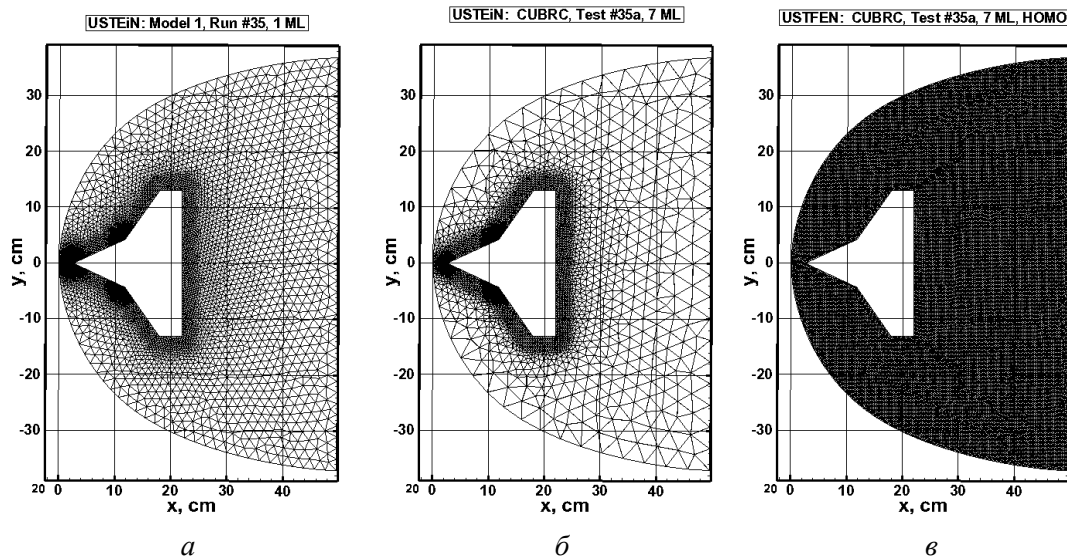


Рис. 1. Распределение граней элементарных тетраэдров в плоскости  $z = 0$  для трех неструктурированных конечно объемных сеток: (а) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 1 мл. элементов,  $h_{min} = 0.18$  см; (б) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 7 мл. элементов;  $h_{min} = 0.05$  см; (в) – квазиоднородная сетка объемом 7 мл. элементов,  $h_{min} = 0.27$  см

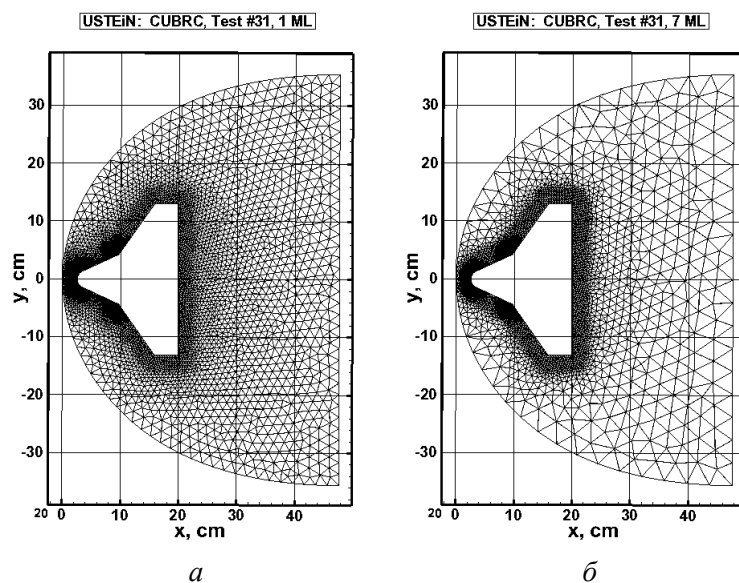


Рис. 2. Распределение граней элементарных тетраэдров в плоскости  $z = 0$  для двух неструктурированных конечно объемных сеток: (а) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 1 мл. элементов,  $h_{min} = 0.18$  см; (б) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 7 мл. элементов,  $h_{min} = 0.05$  см

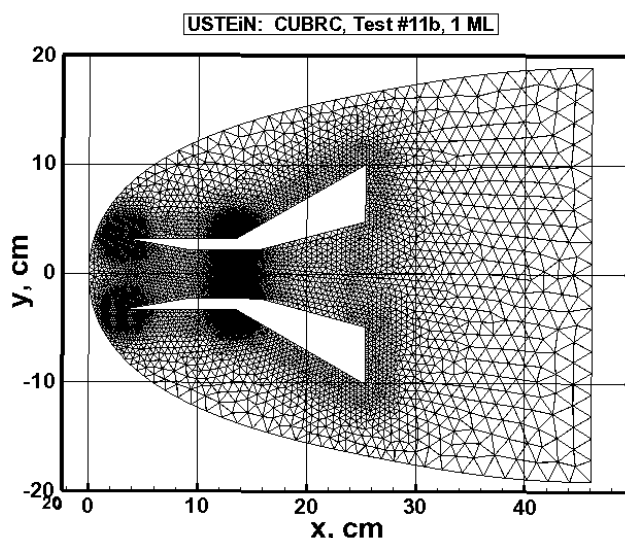


Рис. 3. Распределение граней элементарных тетраэдров в плоскости  $z=0$  для неоднородной сетки со сгущением к поверхности, объемом 1 млн. элементов,  $h_{\min} = 0.08$  см

Расчеты обтекания двойного острого конуса (Run#35a) выполнены на трех тетраэдральных сетках, параметры которых приведены на рис. 1. Первые две сетки отличаются различной степенью неоднородности. Первая сетка (см. рис. 1, а) содержит около 1 млн. элементов и минимальный линейный размер элементарного тетраэдра у поверхности  $h_{\min} \sim 0.18$  см. Вторая сетка (см. рис. 1, б) содержит 7 млн. элементов и  $h_{\min} \sim 0.05$  см. Видно, что в этом случае сетка на некотором расстоянии от исследуемой модели является чрезмерно разреженной. И, наконец, третья сетка (см. рис. 1, в) содержит  $\sim 7$  млн. почти равноразмерных элементов, хотя у поверхности характерный линейный размер является наибольшим,  $h_{\min} \sim 0.27$  см.

Расчеты обтекания двойного затупленного конуса выполнены на двух сетках  $\sim 1$  млн. элементов (см. рис. 2, а) и  $\sim 7$  млн. элементов (см. рис. 2, б). Грубость используемых расчетных сеток и простейший используемый расчетный метод не позволяют надеяться на достоверное описание нагрева обтекаемой поверхности (плотностей поверхностных конвективных тепловых потоков). Однако эти сетки оказываются достаточными для приближенного расчета аэродинамических коэффициентов и получения общего представления о структуре течения (образование сжатого слоя, отрывные течения и т.п.). Разрешение тонкой структуры ударно-волнового взаимодействия при использовании таких сеток оказывается невозможным.

Ниже будут рассмотрены результаты расчетов распределения давления вдоль поверхности испытуемых моделей и сравнение полученных результатов с экспериментальными данными, а также конфигурации полей течения, полученные с использованием двух формулировок уравнения сохранения энергии.

Рассмотрим результаты расчетов, полученных для модели острого двойного конуса для условий эксперимента [4] Run#35a. На рис. 4 и 5 дано сравнение расчетных и экспериментальных [4] данных по распределению коэффициента давления вдоль поверхности

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{0.5 \rho_\infty V_\infty^2}$$

Отметим особенности полученных численных решений при их сопоставлении с экспериментальными данными:

- 1) Распределения коэффициентов давления вдоль поверхности первого конуса ( $x \leq 6$  см) оказываются достаточно близкими для всех использованных сеток и уравнений сохранения энергии. Распределения коэффициентов давления на рис. 4 получены с использованием уравнения для полной удельной энергии, а на рис. 5 – для внутренней удельной энергии. Отметим удовлетворительное согласие расчетных и опытных данных.

- 2) Расчетные данные не позволяют описать плато давления, получаемое в эксперименте [4] вблизи излома образующей, где, как известно, образуется возвратно-вихревое отрывное течение ( $6 < x < 10$  см). Очевидно, что это является следствием невозможности описания указанного отрывного течения на слишком грубых использованных сетках. Отдельно заметим, что зависимости распределения давления вдоль поверхности модели откладываются от критической точки острого конуса, которая на рис. 1, *а*, *б*, *в* соответствует координате  $x = 2.5$  см.
- 3) Экстремальное увеличение коэффициентов давления за изломом образующей конуса наблюдается как в экспериментах, так и в расчете. Расчетные данные демонстрируют более чем двукратное превышение в максимуме экспериментальных данных. Заметим, что отмеченное превышение является типичным для большинства расчетов [9–12, 14–16, 18] и может быть объяснено, с одной стороны, исключительно узкой областью локального повышения давления, являющееся следствием ударно-волнового взаимодействия.
- 4) Расчетные и экспериментальные данные по распределению давления вдоль второй поверхности острого конуса ( $12 < x < 15$  см) оказываются весьма близкими.

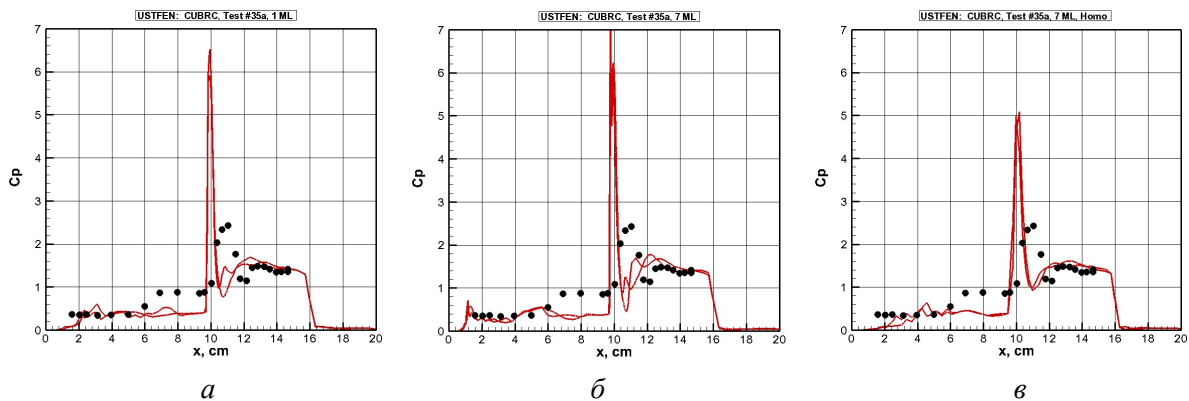


Рис. 4. Распределение коэффициентов давления вдоль поверхности, полученных с использованием уравнения сохранения полной удельной энергии на трех расчетных сетках: (*а*) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 1 мл. элементов; (*б*) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 7 мл. элементов; (*в*) – квазиоднородная сетка объемом 7 мл. элементов

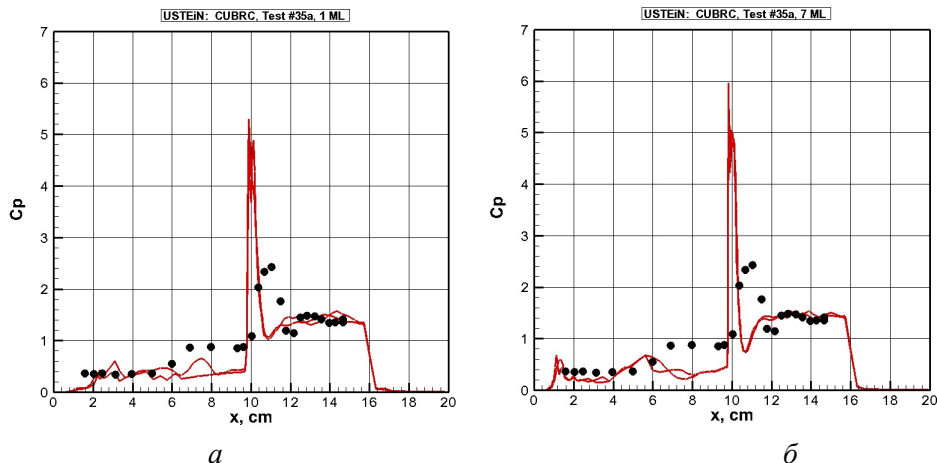


Рис. 5. Распределение коэффициентов давления вдоль поверхности, полученных с использованием уравнения сохранения удельной внутренней энергии на двух расчетных сетках: (*а*) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 1 мл. элементов; (*б*) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 7 мл. элементов

На рис. 6–9 приведены распределения плотности и температуры вблизи поверхности, полученные с использованием двух моделей уравнения сохранения энергии. Отметим слабое влияние использованных расчетных сеток и различие в распределениях плотности и темпера-

туры, полученное для этих двух моделей, заметив, что в отличие от распределений давления, где с хорошей точностью выполняется условие равенства нулю производной по нормали от давления у поверхности, температура и плотность являются усредненными по каждому элементарному тетраэдральному объему.

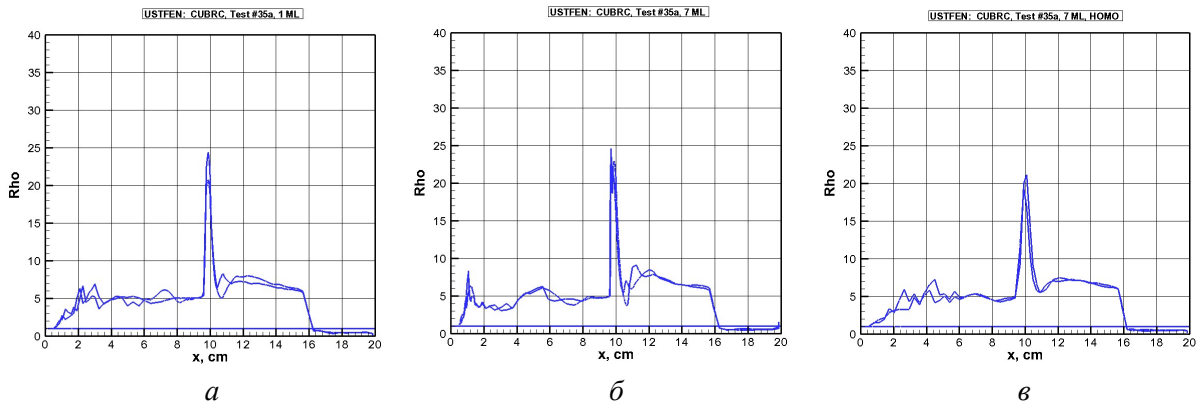


Рис. 6. Распределение плотности  $\rho/\rho_\infty$  вдоль поверхности, полученные с использованием уравнения сохранения полной удельной энергии на трех расчетных сетках: (а) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 1 мл. элементов; (б) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 7 мл. элементов; (в) – квазиоднородная сетка объемом 7 мл. элементов

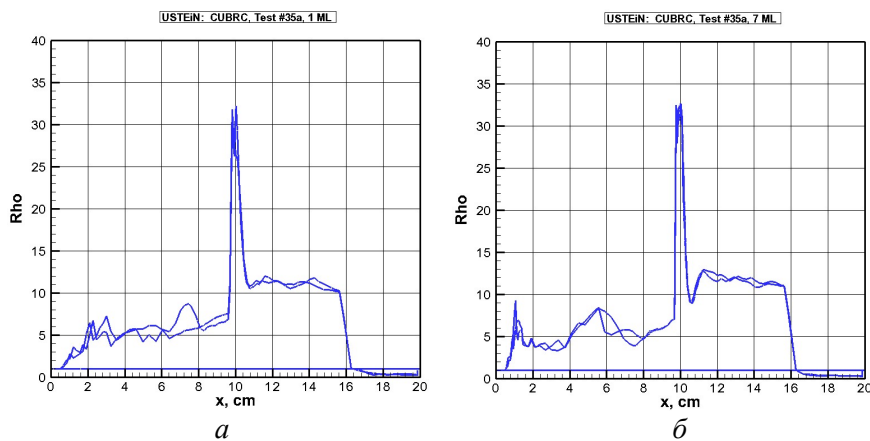


Рис. 7. Распределение плотности  $\rho/\rho_\infty$  вдоль поверхности, полученные с использованием уравнения сохранения удельной внутренней энергии на двух расчетных сетках: (а) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 1 мл. элементов; (б) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 7 мл. элементов

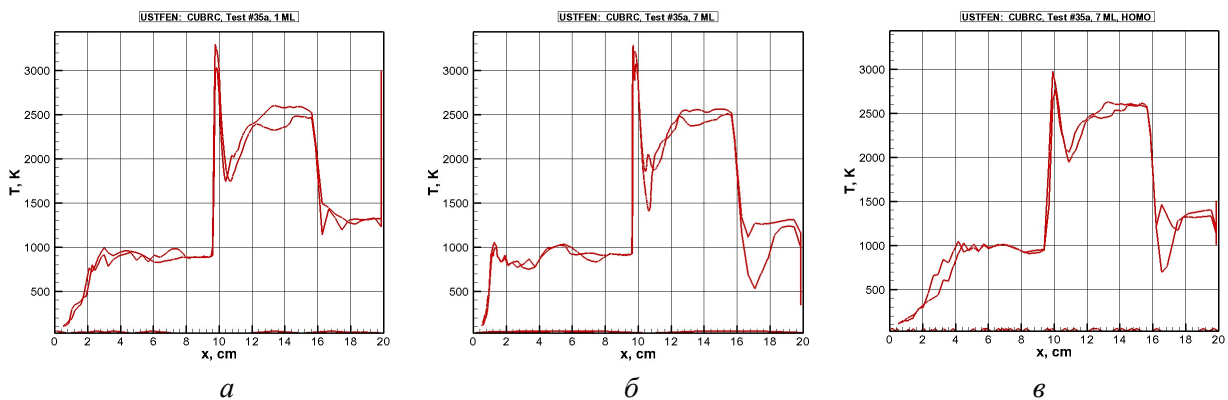


Рис. 8. Распределение температуры вдоль поверхности, полученные с использованием уравнения сохранения полной удельной энергии на трех расчетных сетках: (а) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 1 мл. элементов; (б) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 7 мл. элементов; (в) – квазиоднородная сетка объемом 7 мл. элементов

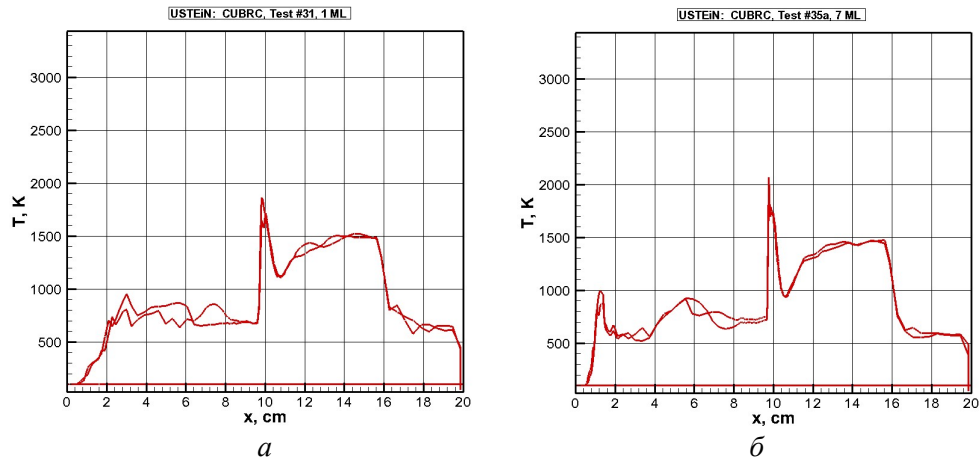


Рис. 9. Распределение температуры вдоль поверхности, полученные с использованием уравнения сохранения удельной внутренней энергии на двух расчетных сетках: (а) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 1 млн. элементов; (б) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 7 млн. элементов

Двухмерные распределения газодинамических функций в плоскости симметрии  $z = 0$  приводятся на рис. 10–15, анализ которых позволяет сделать вывод о степени влияния на получаемые численные решения, как используемых расчетных сеток, так и двух использованных форм уравнения сохранения энергии.

Из представленных распределений давления (рис. 10, 11), плотности (рис. 12, 13) и температуры (рис. 14, 15) следует, что наиболее гладкие решения получены на квазиоднородной сетке, содержащей 7 млн. элементов (рис. 10, в; 12, в; 14, в).

Распределения давления вблизи лобовой наветренной поверхности оказываются близки для всех приведенных вариантов расчетов (рис. 10, 11). Основное отличие наблюдается для отрывной области течения вблизи задней поверхности модели. Аналогичные выводы можно сделать относительно распределений плотности (рис. 12, 13) и температуры (рис. 14, 15).

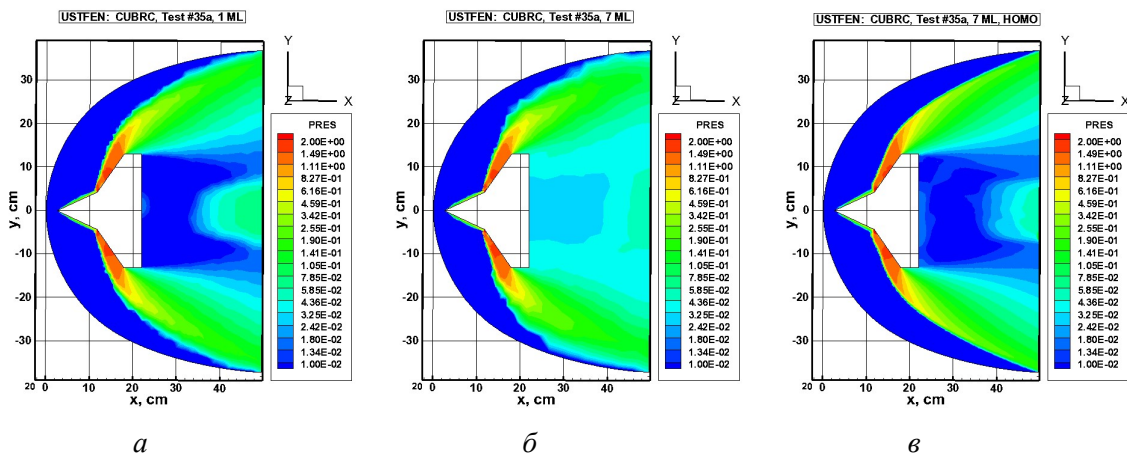


Рис. 10. Поля коэффициентов давления, полученные с использованием уравнения сохранения полной удельной энергии на трех расчетных сетках: (а) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 1 млн. элементов; (б) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 7 млн. элементов; (в) – квазиоднородная сетка объемом 7 млн. элементов

Заметим весьма сильное влияние на конфигурацию рассчитываемых полей как используемых сеток, так и моделей уравнения сохранения энергии. Что касается влияния сеток, то вопрос представляется очевидными и требующим проведения дополнительных численных экспериментов для достижения приемлемой «сходимости по сеткам» искомых численных данных. Различия, обусловленные используемым уравнением сохранения энергии требуют более

детального исследования, включая учет факта неконсервативности уравнения, использования более совершенных аппроксимаций искомых функций на тетраэдральных сетках и, конечно, подробности расчетных сеток.

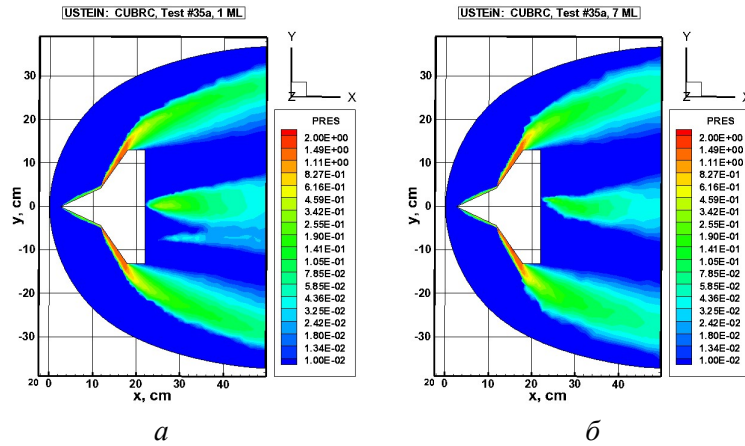


Рис. 11. Поля коэффициентов давления, полученные с использованием уравнения сохранения удельной внутренней энергии на двух расчетных сетках: (а) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 1 мл. элементов; (б) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 7 мл. элементов

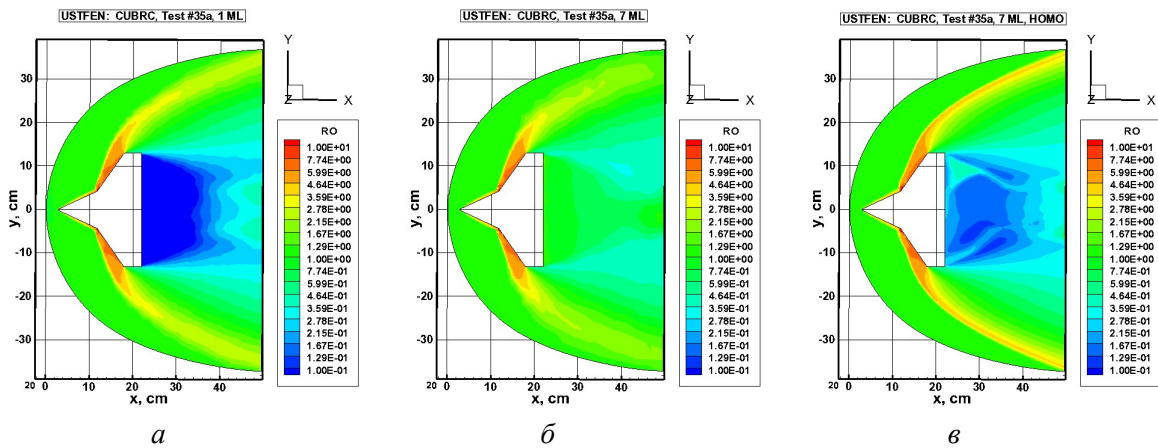


Рис. 12. Поля плотности, полученные с использованием уравнения сохранения полной удельной энергии на трех расчетных сетках: (а) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 1 мл. элементов; (б) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 7 мл. элементов; (в) – квазиоднородная сетка объемом 7 мл. элементов

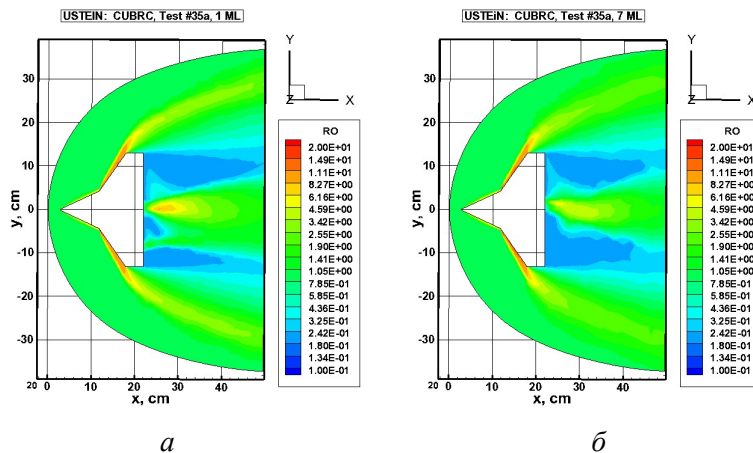


Рис. 13. Поля плотности, полученные с использованием уравнения сохранения удельной внутренней энергии на двух расчетных сетках: (а) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 1 мл. элементов; (б) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 7 мл. элементов

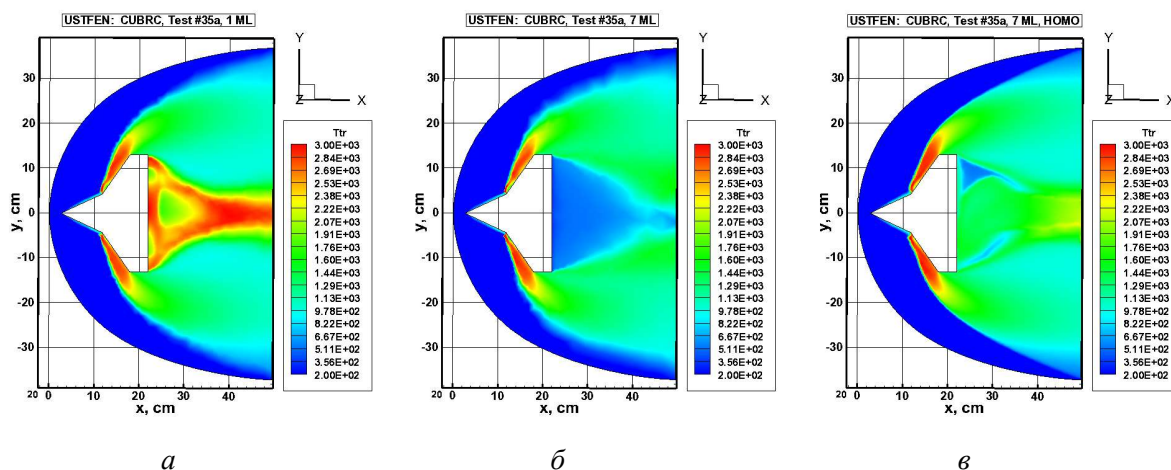


Рис. 14. Поля температуры, полученные с использованием уравнения сохранения полной удельной энергии на трех расчетных сетках: (а) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 1 мл. элементов; (б) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 7 мл. элементов; (в) – квазиоднородная сетка объемом 7 мл. элементов

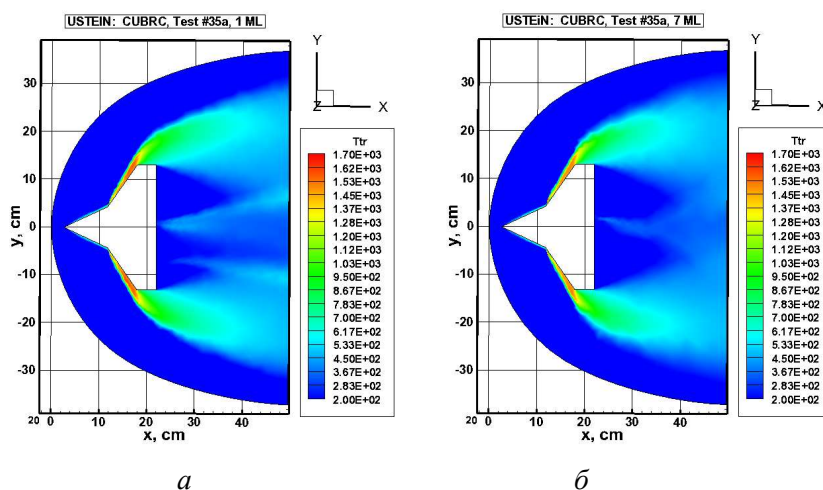


Рис. 15. Поля температуры, полученные с использованием уравнения сохранения удельной внутренней энергии на двух расчетных сетках: (а) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 1 мл. элементов; (б) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 7 мл. элементов

Пространственные распределения давления (рис. 16, 17) и температуры (рис. 18, 19) дают наглядное представление о локализации силового и теплового воздействия на поверхность двойного конуса вблизи излома образующей, а также о конфигурации ударных волн и областей повышенной температуры за испытуемой моделью в области отрывного течения и следа.

Особенностью второго расчетного варианта, основанного на экспериментальных данных [4] (тест Run#31), является образование над первой поверхностью конуса энтропийного слоя, обусловленного его затуплением. Роль энтропийного слоя применительно к условиям формирования локализованных силовых и тепловых воздействий достаточно подробно исследовалась в работах [3, 6]. В нашем случае представляет интерес степень отличия полученных расчетных данных на грубых расчетных сетках с экспериментальными данными. Такое сопоставление выполнено на рис. 20 (использовано уравнение сохранения удельной полной энергии) и на рис. 21 (использовано уравнение сохранения удельной внутренней энергии).

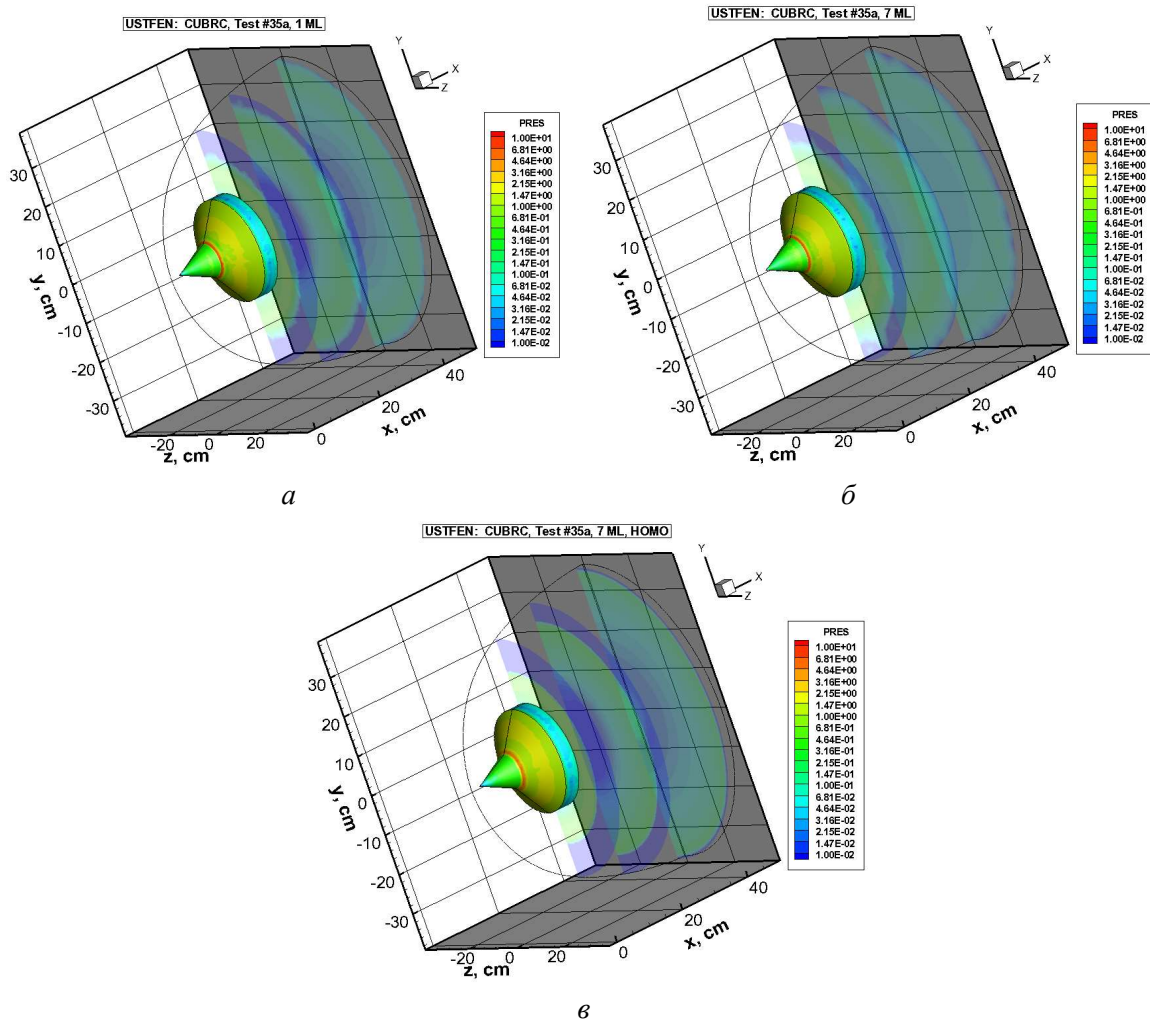


Рис. 16. Поля коэффициентов давления, полученные с использованием уравнения сохранения полной удельной энергии на трех расчетных сетках: (*a*) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 1 мл. элементов; (*б*) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 7 мл. элементов; (*в*) – квазиоднородная сетка объемом 7 мл. элементов

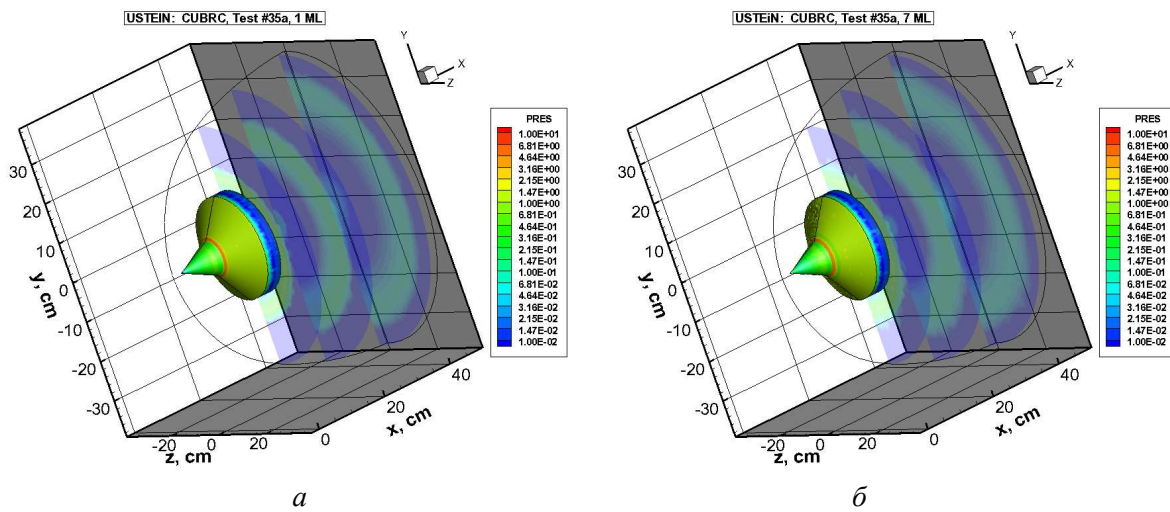


Рис. 17. Поля коэффициентов давления, полученные с использованием уравнения сохранения удельной внутренней энергии на двух расчетных сетках: (*a*) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 1 мл. элементов; (*б*) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 7 мл. элементов

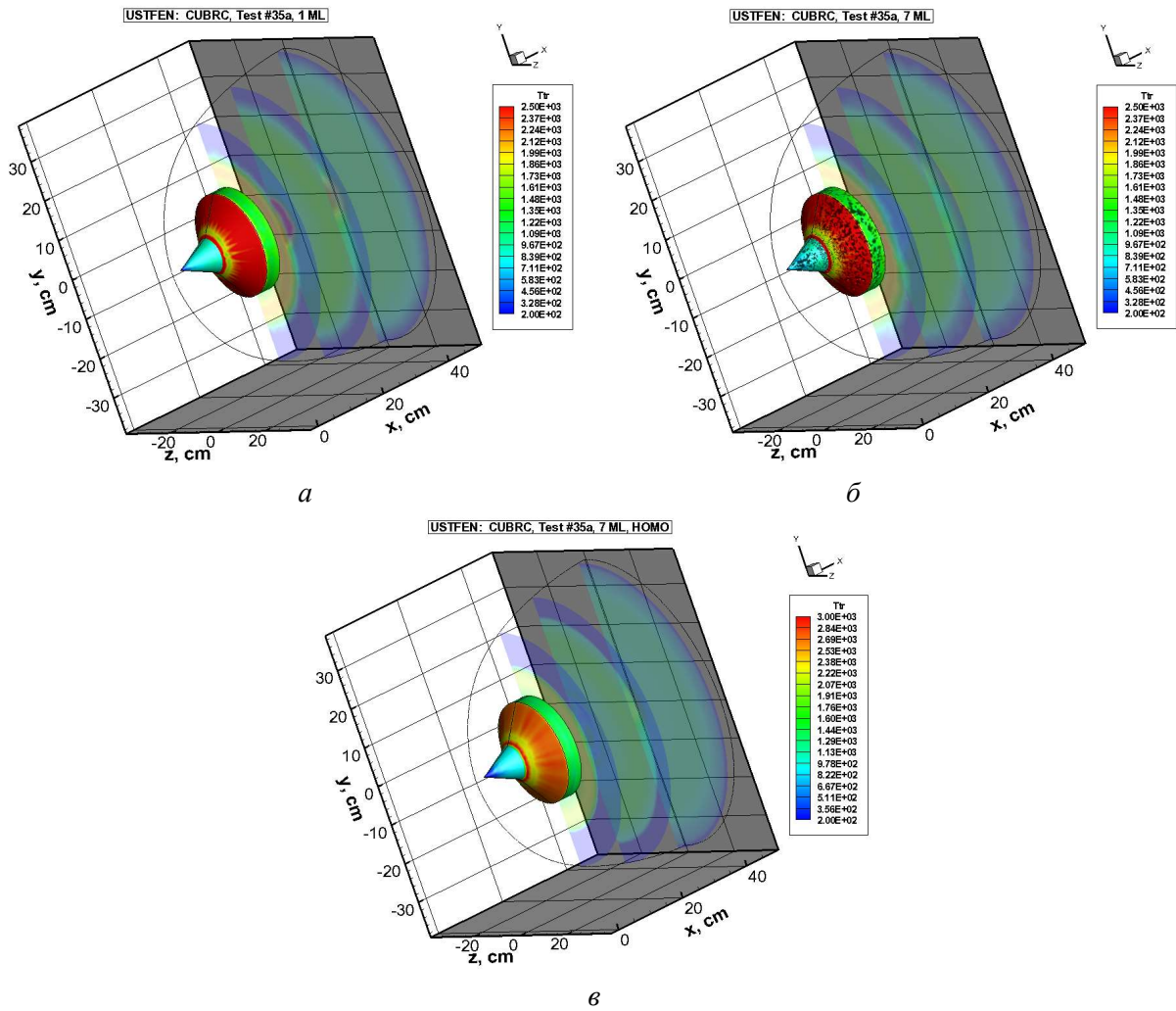


Рис. 18. Поля температуры, полученные с использованием уравнения сохранения полной удельной энергии на трех расчетных сетках: (а) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 1 мл. элементов; (б) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 7 мл. элементов; (в) – квазиоднородная сетка объемом 7 мл. элементов

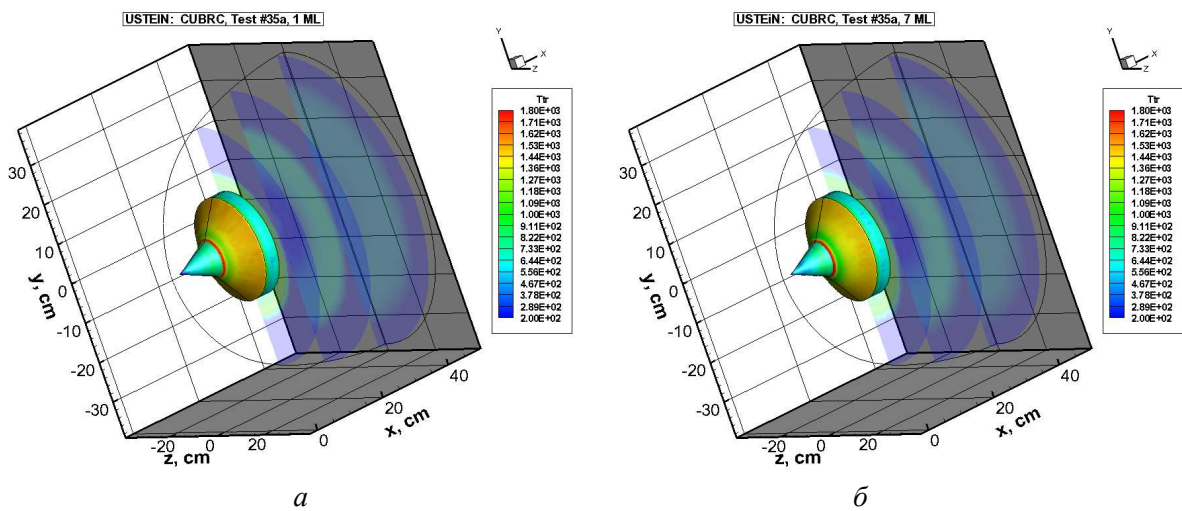


Рис. 19. Поля температуры, полученные с использованием уравнения сохранения удельной внутренней энергии на двух расчетных сетках: (а) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 1 мл. элементов; (б) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 7 мл. элементов

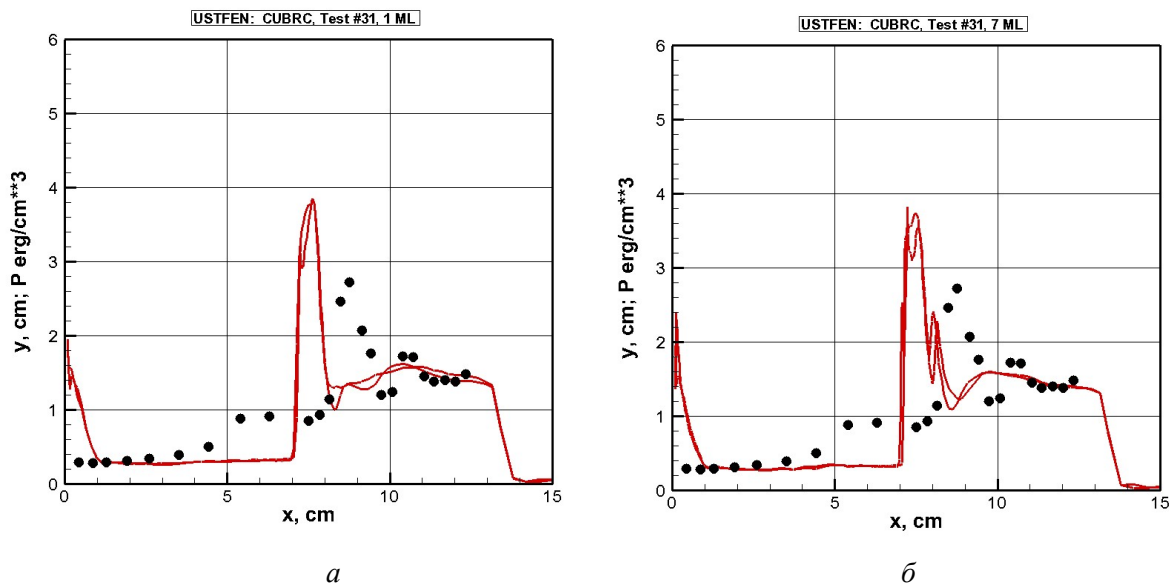


Рис. 20. Распределение коэффициентов давления вдоль поверхности, полученных с использованием уравнения сохранения полной удельной энергии на трех расчетных сетках: (а) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 1 мл. элементов; (б) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 7 мл. элементов

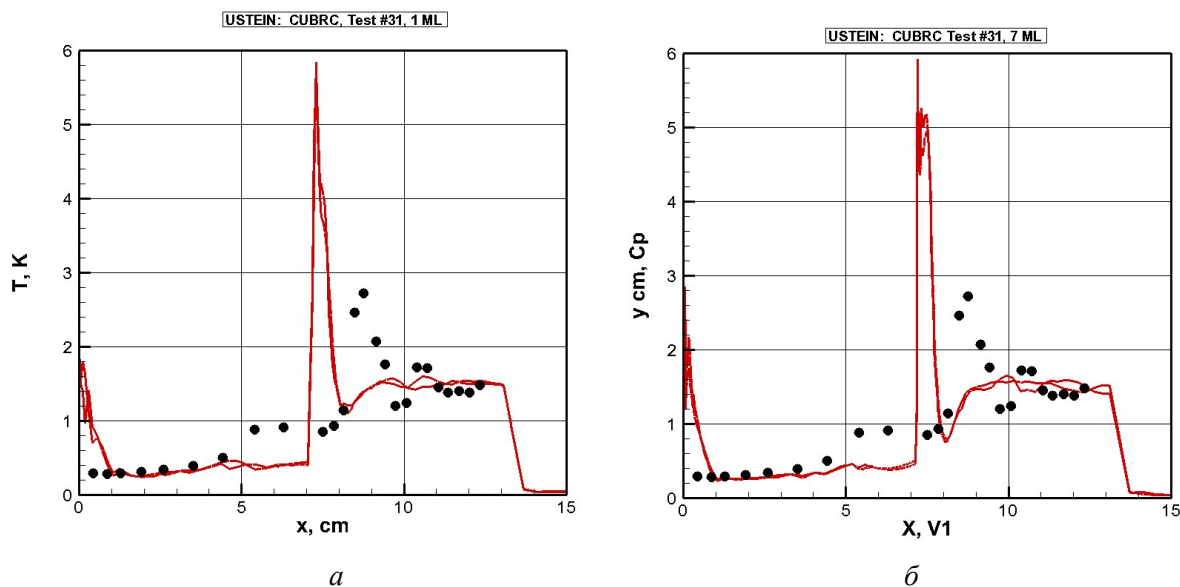


Рис. 21. Распределение коэффициентов давления вдоль поверхности, полученных с использованием уравнения сохранения внутренней энергии на двух расчетных сетках: (а) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 1 мл. элементов; (б) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 7 мл. элементов

Также, как и в случае двойного острого конуса, расчетные данные удовлетворительно предсказывают распределение давления вдоль первой и второй поверхностей конуса, а также вблизи излома образующей. Примечательно, что также, как и у большинства авторов полученных ранее расчетных данных [9–12, 14–16, 18], наблюдается небольшой сдвиг между расчетными и опытными данными типовых значений давления в окрестностях излома образующей.

Сравнение распределений плотности (рис. 22, 23) и температуры (рис. 24, 25) у поверхности показывает аналогичное соотношение этих функций, отмеченное для первого расчетного варианта (Run#35a), при использовании полной и внутренней энергии.

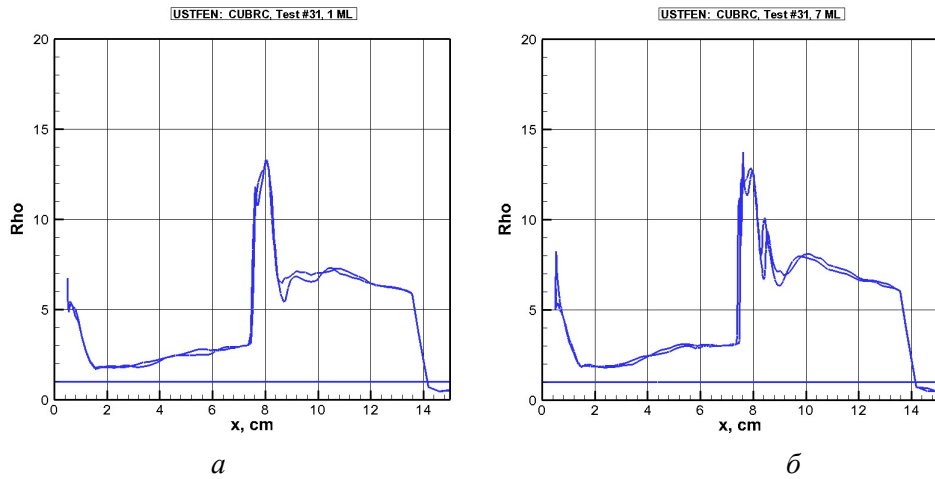


Рис. 22. Распределение плотности  $\rho/\rho_\infty$  вдоль поверхности, полученные с использованием уравнения сохранения полной удельной энергии на двух расчетных сетках: (а) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 1 мл. элементов; (б) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 7 мл. элементов

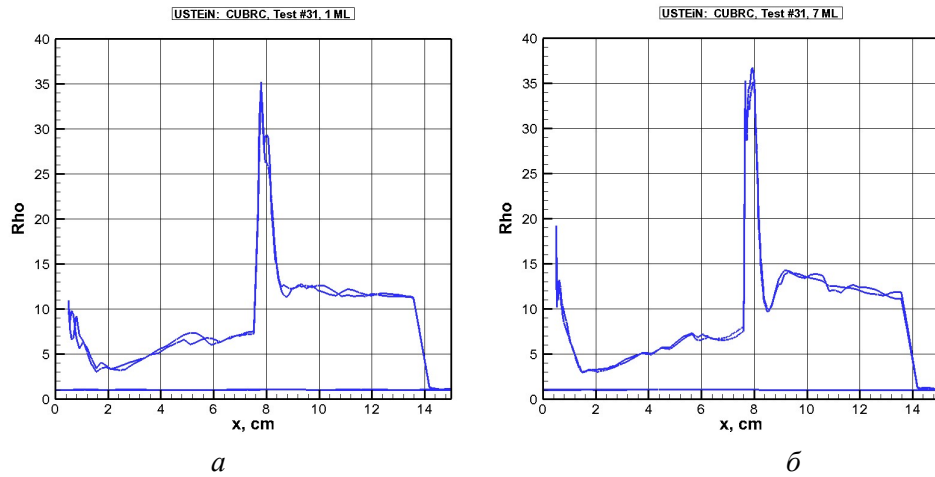


Рис. 23. Распределение плотности  $\rho/\rho_\infty$  вдоль поверхности, полученные с использованием уравнения сохранения удельной внутренней энергии на двух расчетных сетках: (а) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 1 мл. элементов; (б) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 7 мл. элементов

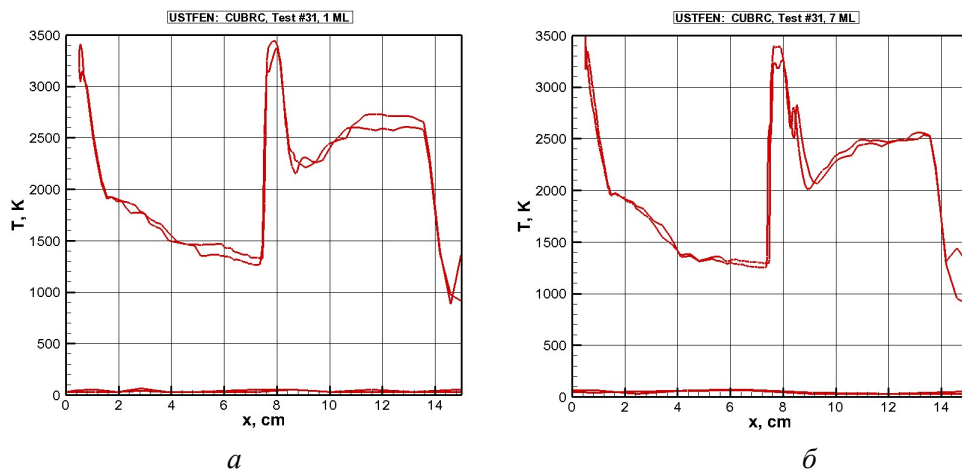


Рис. 24. Распределение температуры вдоль поверхности, полученные с использованием уравнения сохранения полной удельной энергии на двух расчетных сетках: (а) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 1 мл. элементов; (б) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 7 мл. элементов

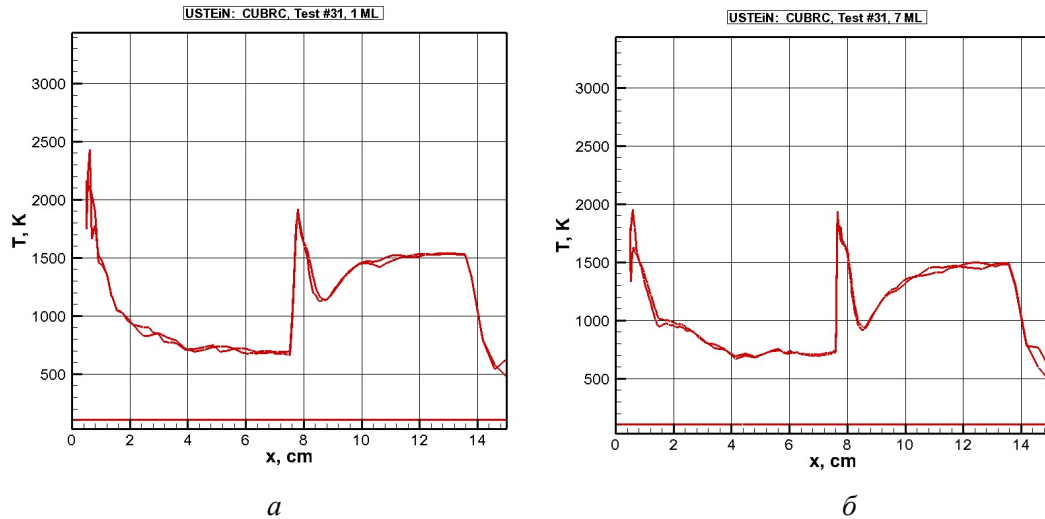


Рис. 25. Распределение температуры вдоль поверхности, полученные с использованием уравнения сохранения удельной внутренней энергии на двух расчетных сетках: (а) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 1 мл. элементов; (б) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 7 мл. элементов

Поля газодинамических функций в плоскости симметрии  $z = 0$  показывают заметные различия в распределениях давления (рис. 26, 27), плотности (рис. 28, 29) и температуры (рис. 30, 31), рассчитанных с использованием уравнений сохранения полной и внутренней энергии. Вблизи лобовой поверхности найденные решения близки. Основные отличия наблюдаются в зоне отрывного течения и в следе за задней поверхностью модели. Напомним, что при использовании уравнения сохранения полной удельной энергии, именно в этой области течения ожидаются наибольшие погрешности.

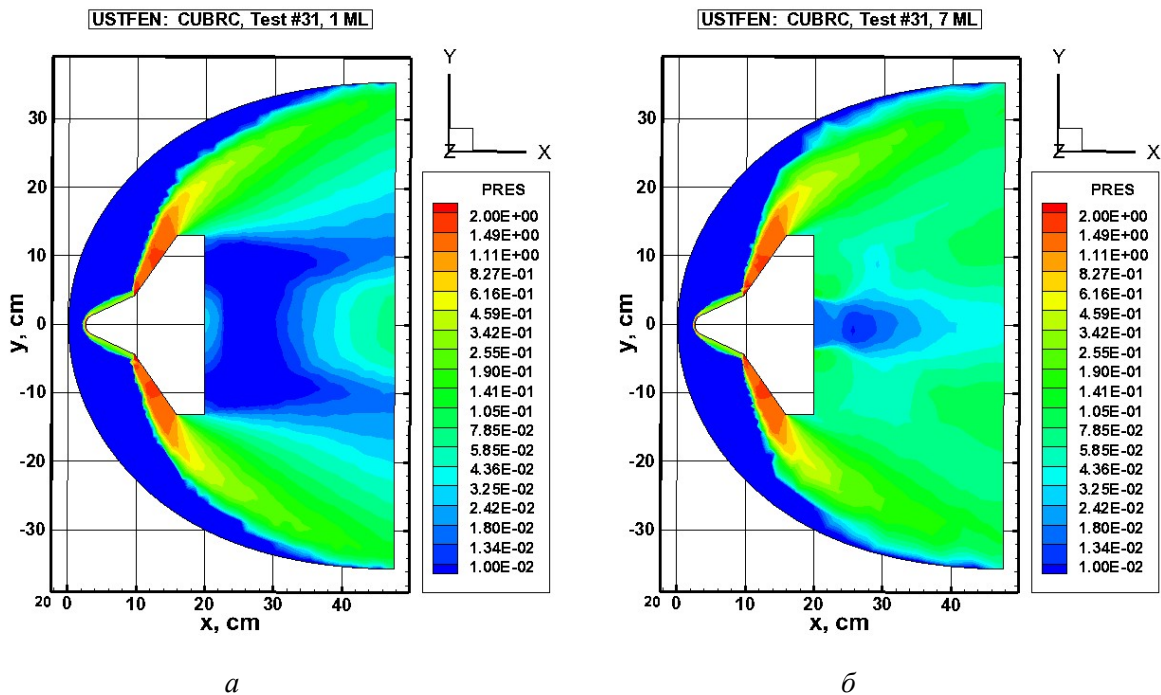


Рис. 26. Поля коэффициентов давления, полученные с использованием уравнения сохранения полной удельной энергии на двух расчетных сетках: (а) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 1 мл. элементов; (б) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 7 мл. элементов

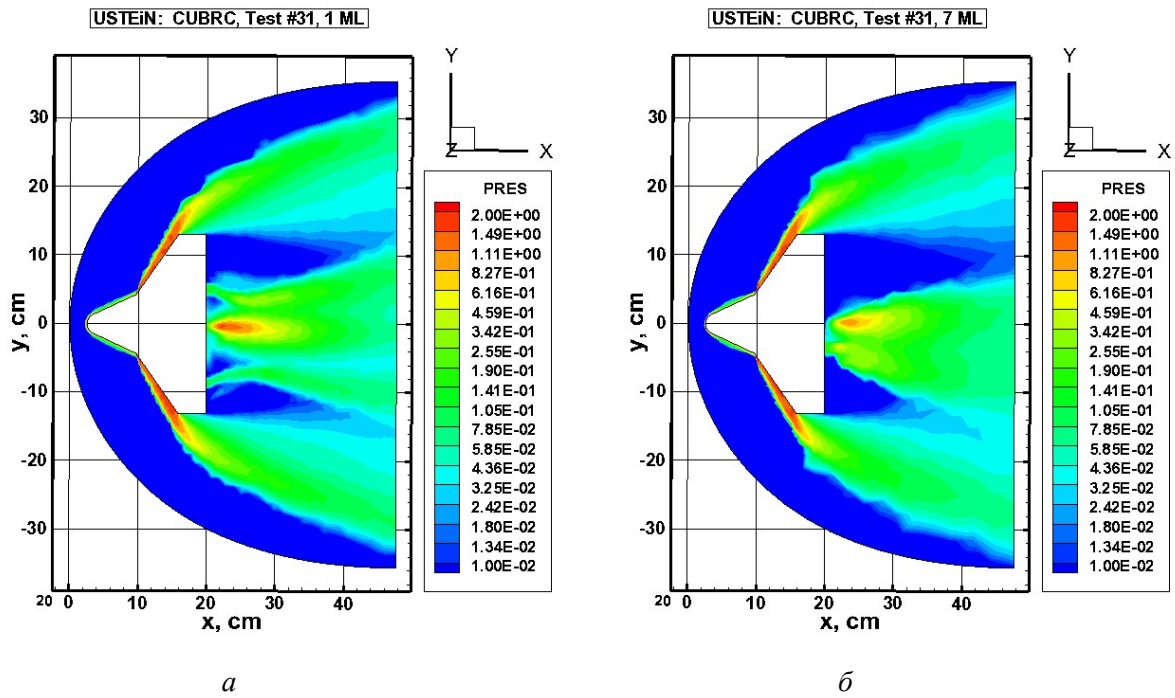


Рис. 27. Поля коэффициентов давления, полученные с использованием уравнения сохранения удельной внутренней энергии на двух расчетных сетках: (а) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 1 мл. элементов; (б) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 7 мл. элементов

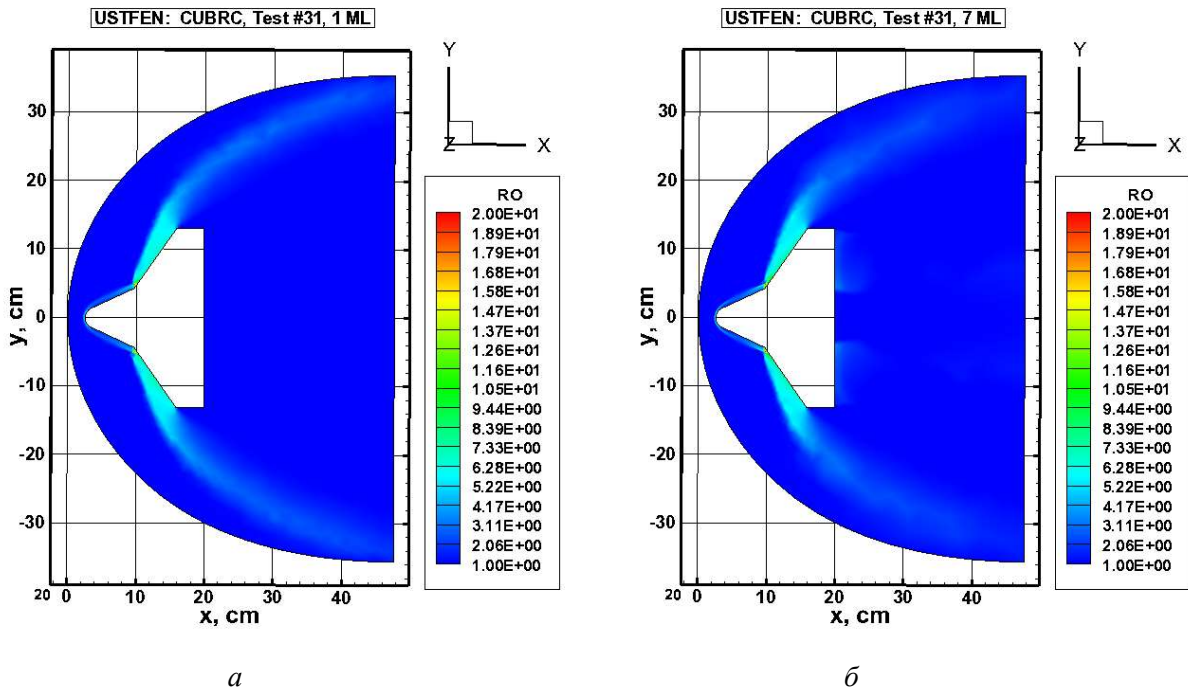


Рис. 28. Поля плотности, полученные с использованием уравнения сохранения полной удельной энергии на двух расчетных сетках: (а) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 1 мл. элементов; (б) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 7 мл. элементов

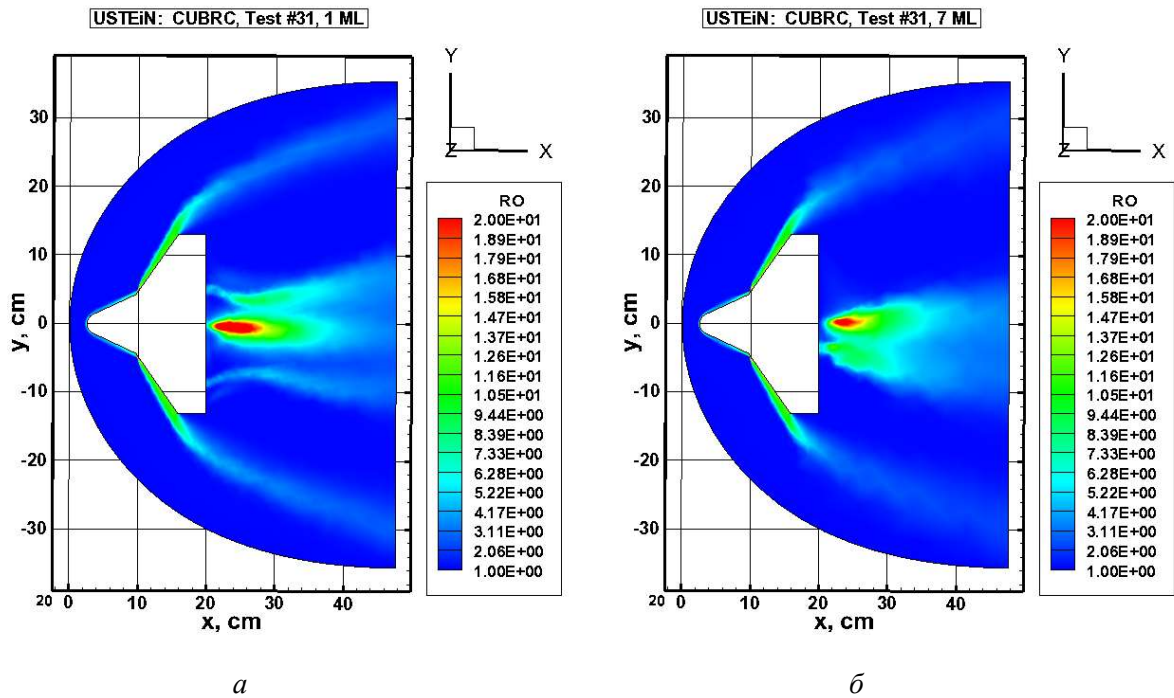


Рис. 29. Поля плотности, полученные с использованием уравнения сохранения удельной внутренней энергии на двух расчетных сетках: (а) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 1 мл. элементов; (б) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 7 мл. элементов

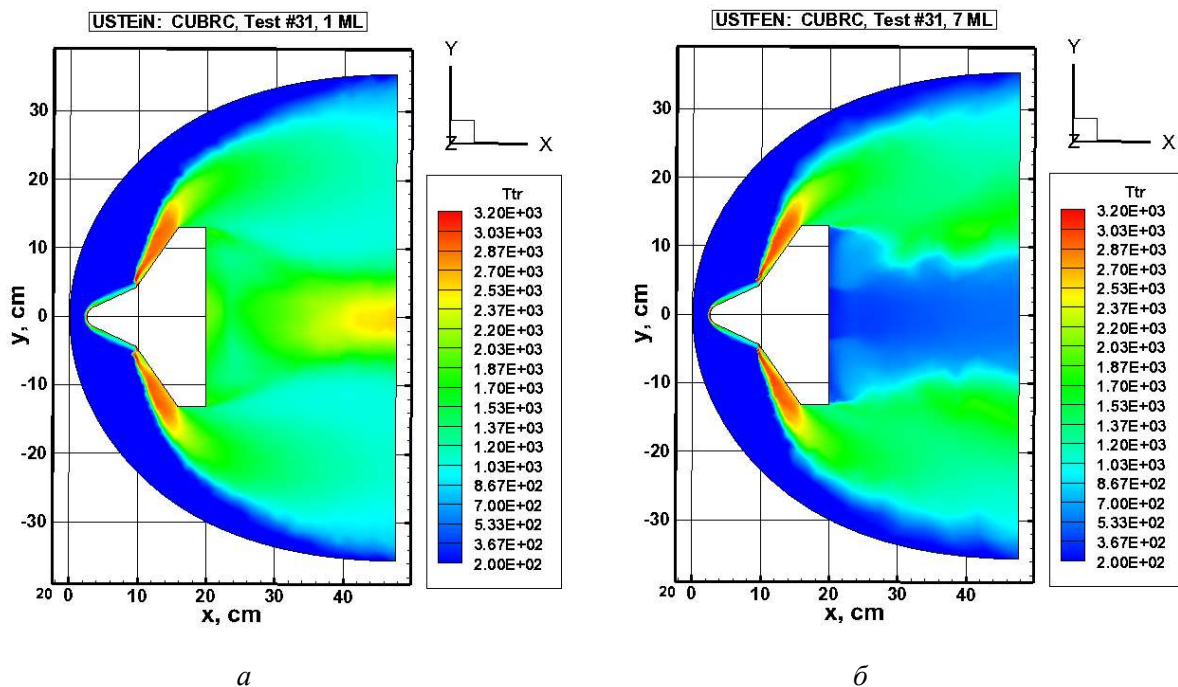


Рис. 30. Поля температуры, полученные с использованием уравнения сохранения полной удельной энергии на двух расчетных сетках: (а) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 1 мл. элементов; (б) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 7 мл. элементов

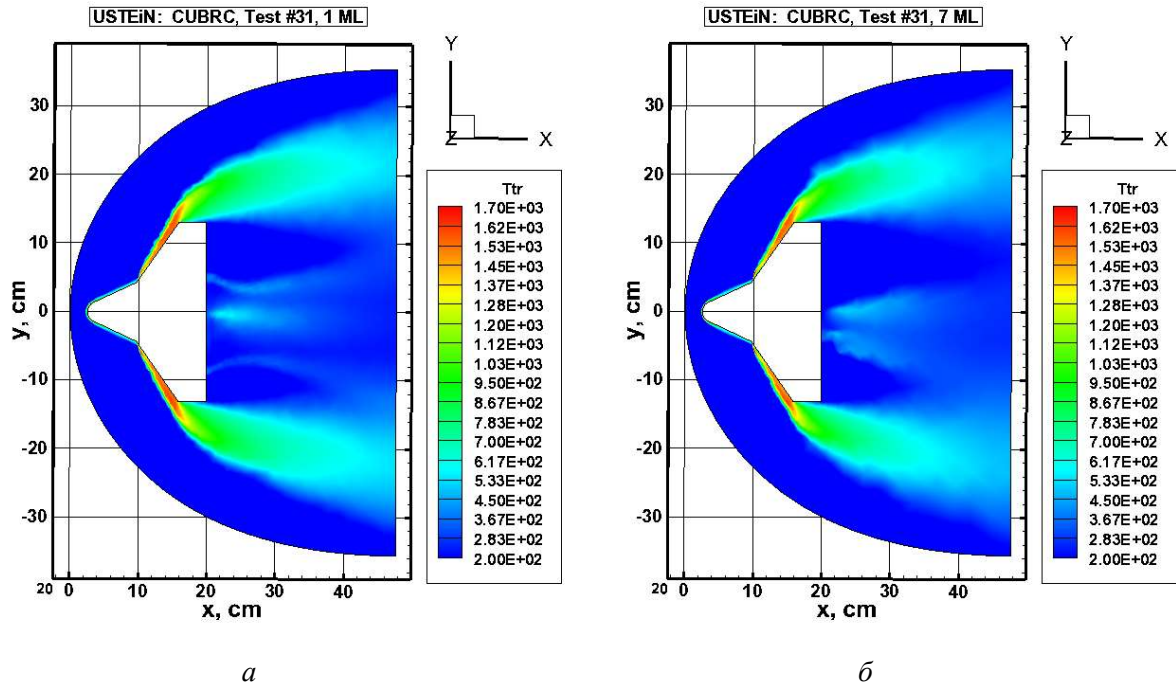


Рис. 31. Поля температуры, полученные с использованием уравнения сохранения внутренней энергии на двух расчетных сетках: (а) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 1 мл. элементов; (б) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 7 мл. элементов

Рисунки 32–35 дают более общее представление о пространственном характере распределения давления (рис. 32, 33) и температуры (рис. 34, 35). Область экстремального силового и теплового воздействия на поверхность обтекаемой модели хорошо идентифицируется вблизи излома образующей конуса.

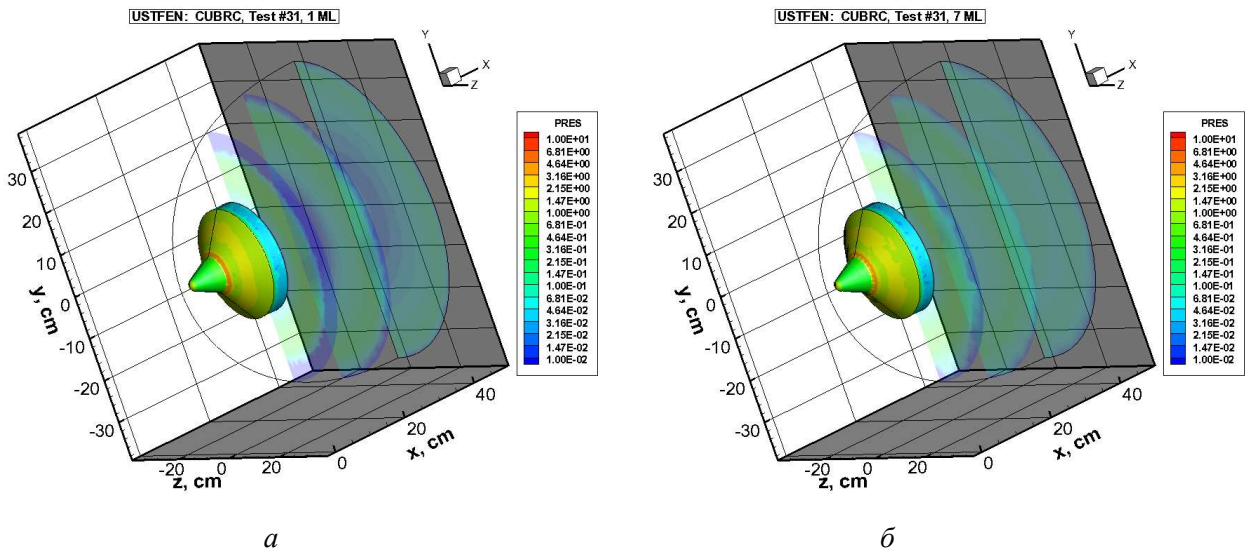


Рис. 32. Поля коэффициентов давления, полученные с использованием уравнения сохранения полной удельной энергии на двух расчетных сетках: (а) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 1 мл. элементов; (б) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 7 мл. элементов

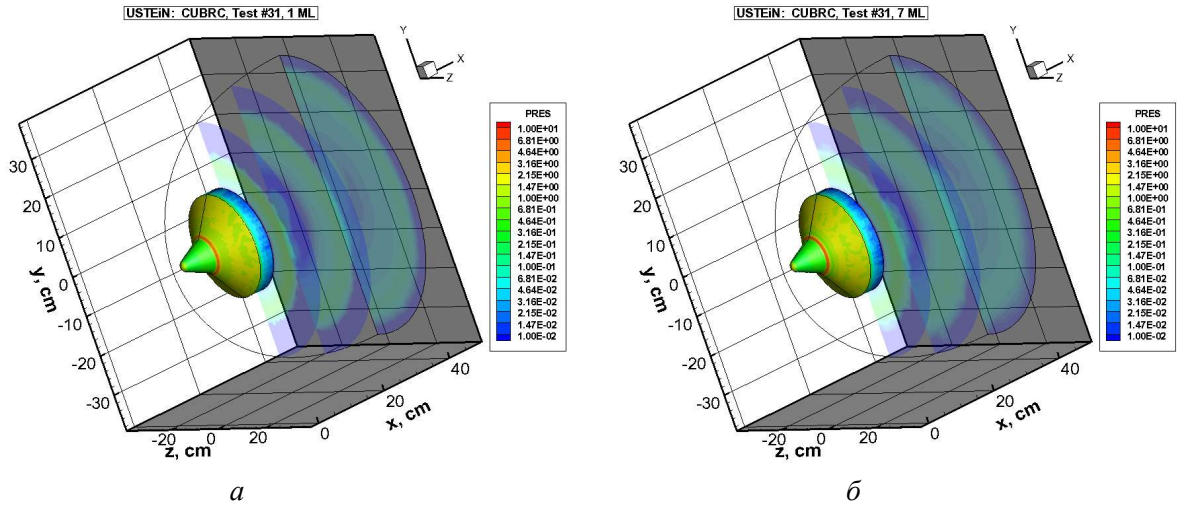


Рис. 33. Поля коэффициентов давления, полученные с использованием уравнения сохранения удельной внутренней энергии на двух расчетных сетках: (а) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 1 мл. элементов; (б) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 7 мл. элементов

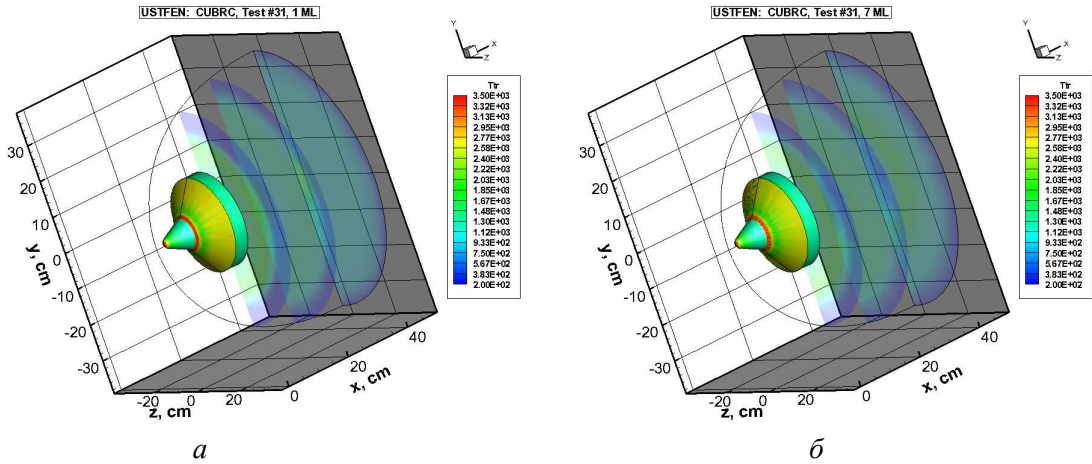


Рис. 34. Поля температуры, полученные с использованием уравнения сохранения полной удельной энергии на двух расчетных сетках: (а) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 1 мл. элементов; (б) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 7 мл. элементов

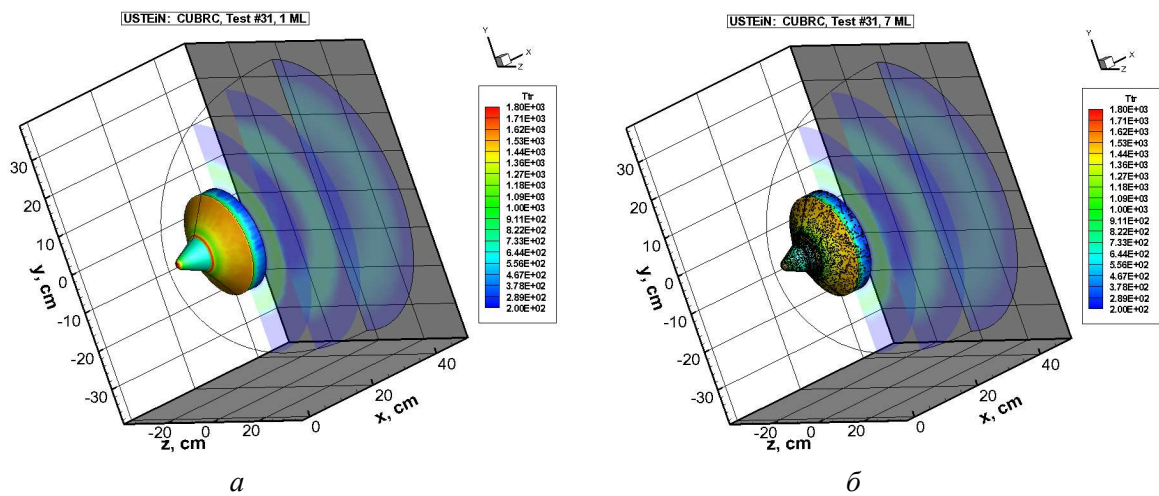


Рис. 35. Поля температуры, полученные с использованием уравнения сохранения удельной внутренней энергии на двух расчетных сетках: (а) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 1 мл. элементов; (б) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 7 мл. элементов

На рис. 36–39 показаны поля полной и внутренней удельной энергии, рассчитанной с использованием двух моделей сохранения энергии. Очевидно, что качественно лучшее решение получено с использованием уравнения сохранения внутренней энергии. Однако данный вывод требует своего подтверждения на более подробных сетках.

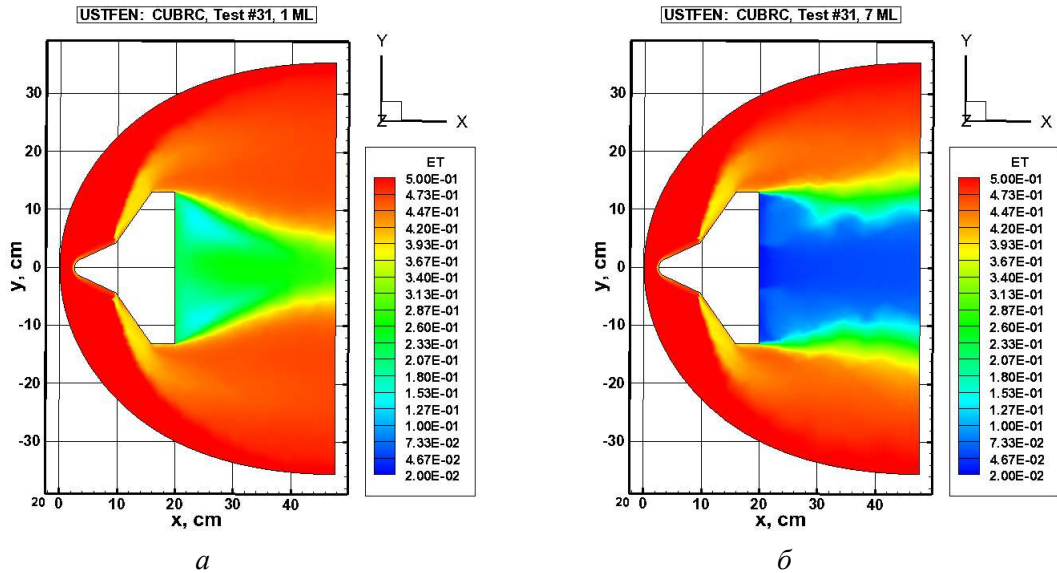


Рис. 36. Поля полной удельной энергии, полученные с использованием уравнения сохранения полной удельной энергии на двух расчетных сетках: (а) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 1 мл. элементов; (б) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 7 мл. элементов

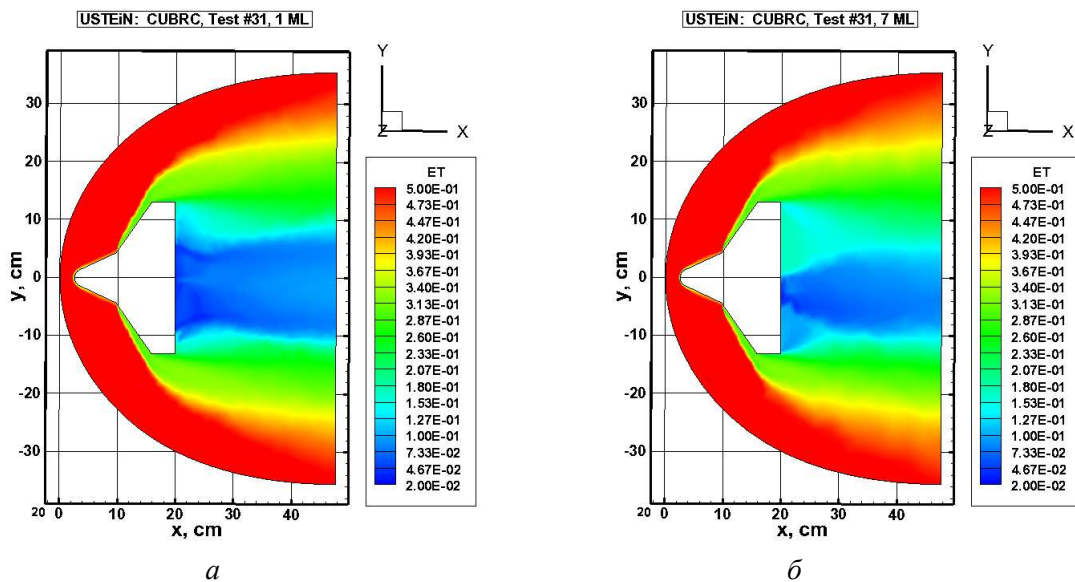


Рис. 37. Поля полной удельной энергии, полученные с использованием уравнения сохранения удельной внутренней энергии на двух расчетных сетках: (а) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 1 мл. элементов; (б) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 7 мл. элементов

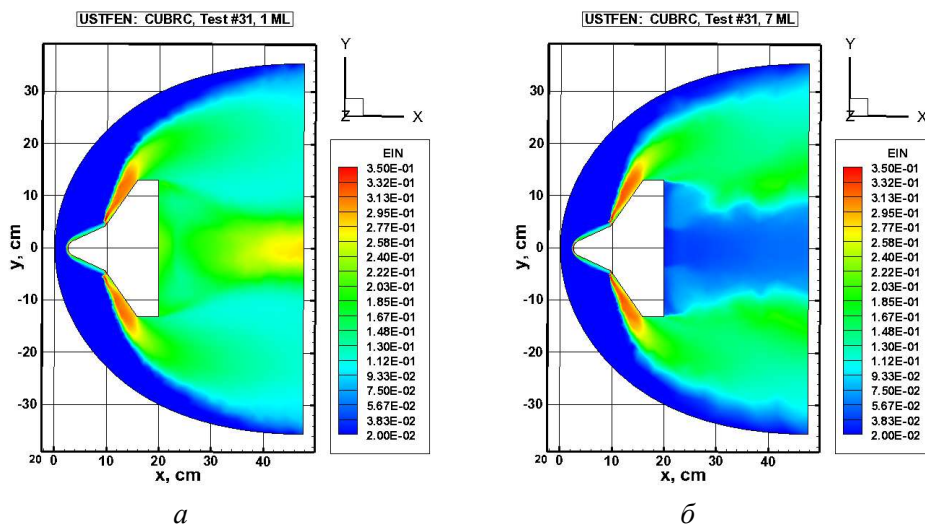


Рис. 38. Поля внутренней энергии, полученные с использованием уравнения сохранения полной удельной энергии на двух расчетных сетках: (а) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 1 мл. элементов; (б) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 7 мл. элементов

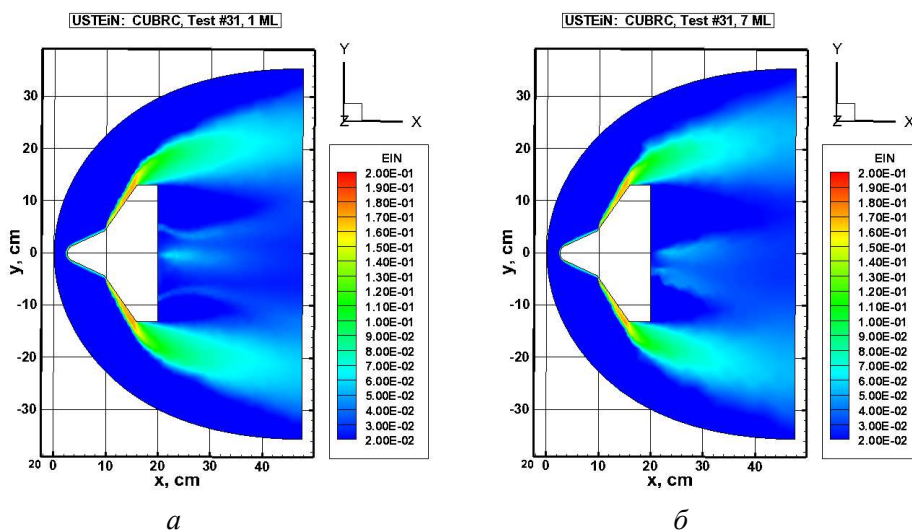


Рис. 39. Поля внутренней энергии, полученные с использованием уравнения сохранения удельной внутренней энергии на двух расчетных сетках: (а) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 1 мл. элементов; (б) – неоднородная сетка со сгущением к поверхности, объемом 7 мл. элементов

Результаты расчетов продольного обтекания полого цилиндра с юбкой представлены на рис. 40–48. Особенностью этого тестового варианта является измерение давления и плотности конвективных тепловых потоков вдоль внешней поверхности полого цилиндра и замыкающей его юбки. Очевидно, что условия развития пограничного слоя у поверхности в данном случае отличаются от предыдущих вариантов обтекания конуса. Физические измерения параметров потока во внутренней области течения не производились.

Сравнение расчетных и экспериментальных данных для данного расчетного варианта показано на рис. 40, откуда видно, что использование уравнений сохранения полной и внутренней энергии дают практически идентичные результаты. В обоих случаях получается хорошее согласие опытных и расчетных данных по распределению давления на юбке и в области излома образующей. Распределение давления вдоль передней цилиндрической поверхности предсказывается значительно хуже. В значительной степени здесь сказывается очень большой размер первых элементарных тетраэдральных объемов на лидирующей кромке полого цилиндра.

Распределения температуры вдоль поверхности цилиндра с юбкой, показанные на рис. 41 демонстрируют аналогичные различия в случаях использования уравнений сохранения полной и внутренней энергии, как для вариантов обтекания двойных конусов.

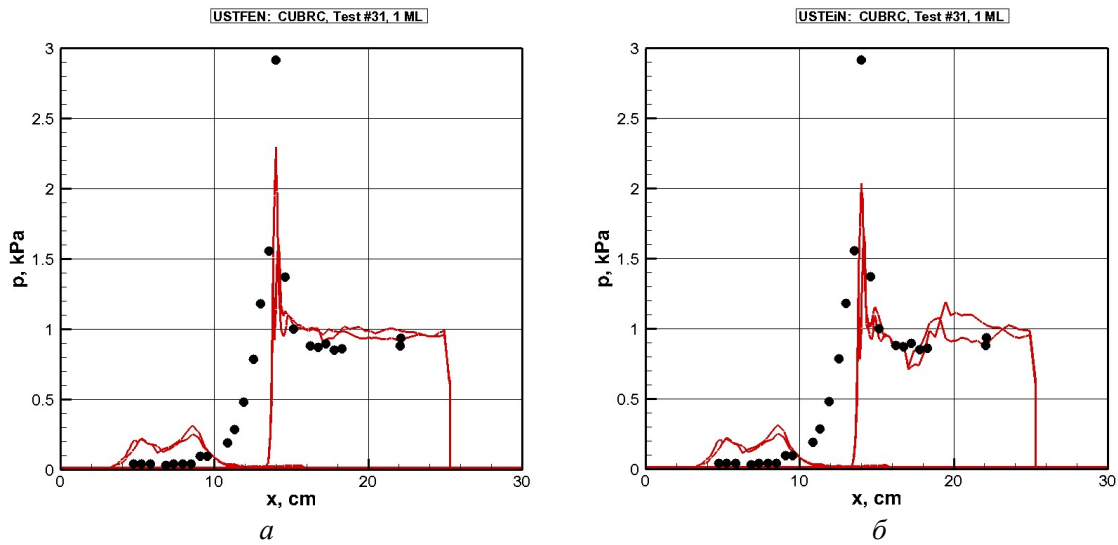


Рис. 40. Распределения давления вдоль поверхности, полученных с использованием уравнения сохранения полной (а) и внутренней удельной энергии (б)

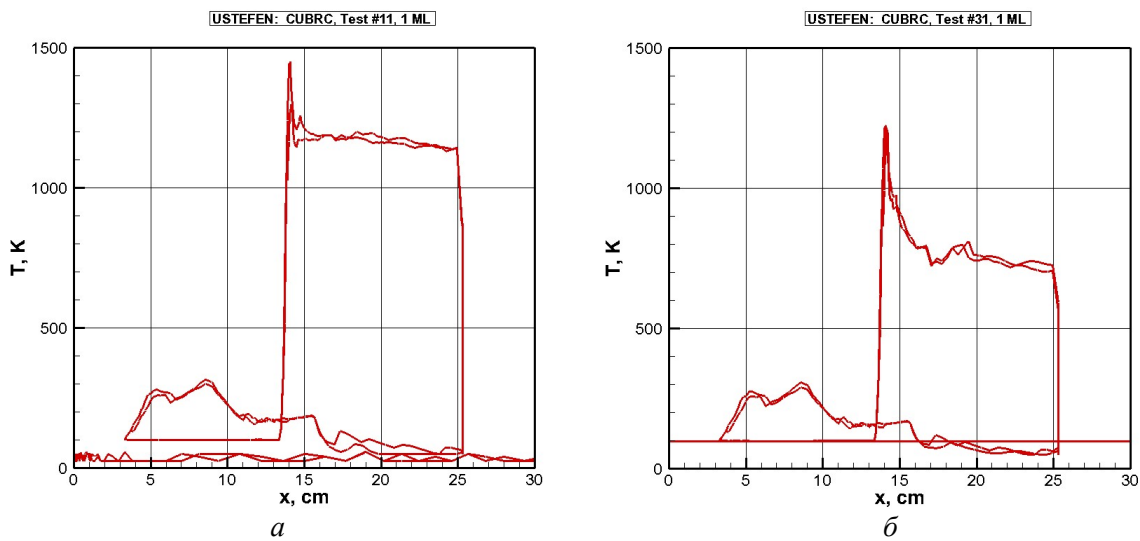


Рис. 41. Распределения температуры вдоль поверхности, полученных с использованием уравнения сохранения полной (а) и внутренней удельной энергии (б)

Поля газодинамических функций в плоскости симметрии  $z = 0$  показывают близость распределений давления (рис. 42) и плотности (рис. 44); заметны различия в распределениях температуры (рис. 43) в отрывной области течения и в следе. Соответствующие распределения получены для полной (рис. 45) и внутренней (рис. 46) удельной энергии.

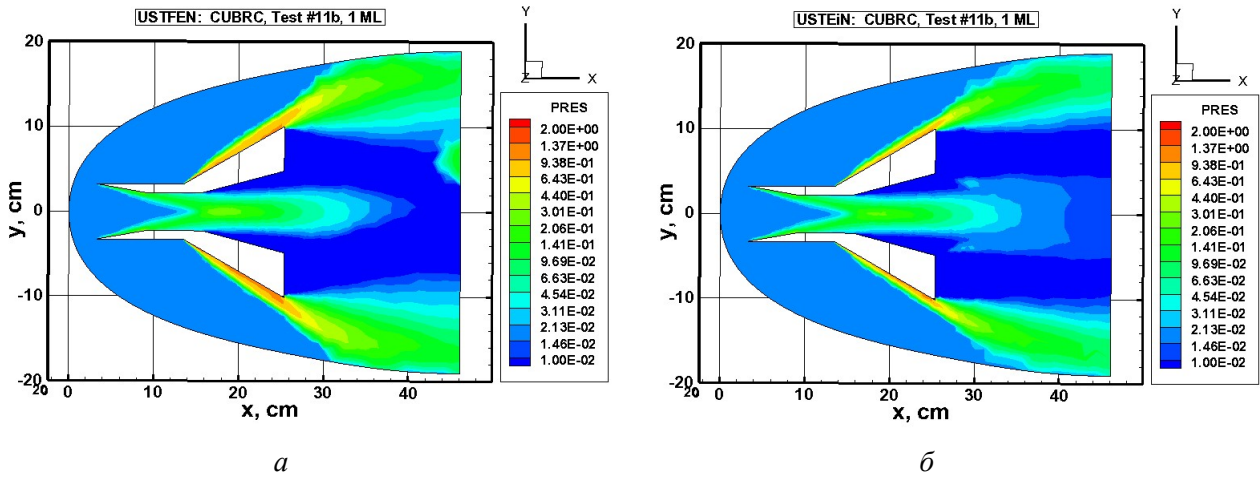


Рис. 42. Поля давления, полученные с использованием уравнения сохранения полной (а) и внутренней удельной энергии (б)

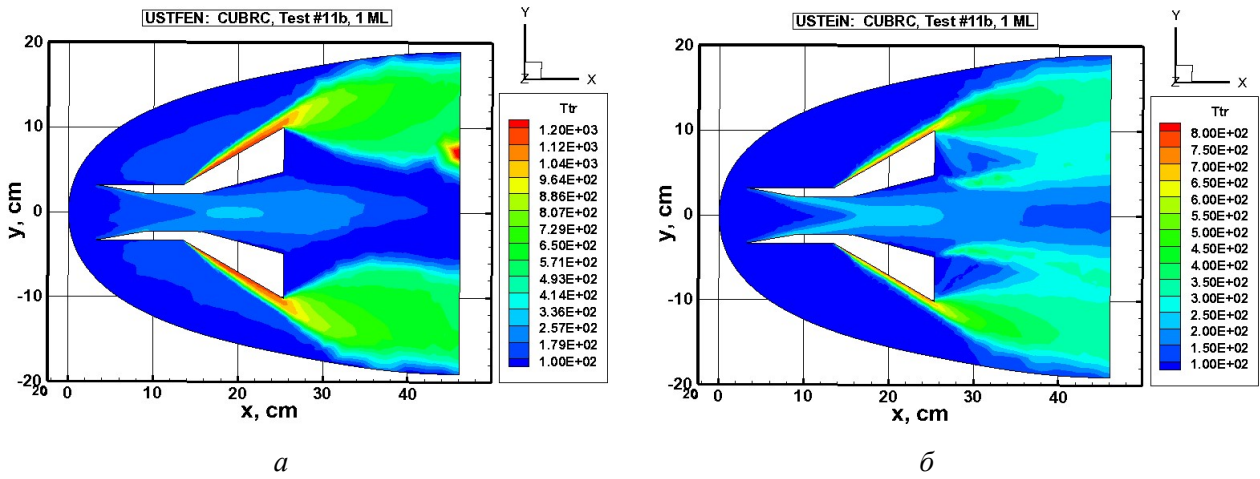


Рис. 43. Поля температуры, полученные с использованием уравнения сохранения полной (а) и внутренней удельной энергии (б)

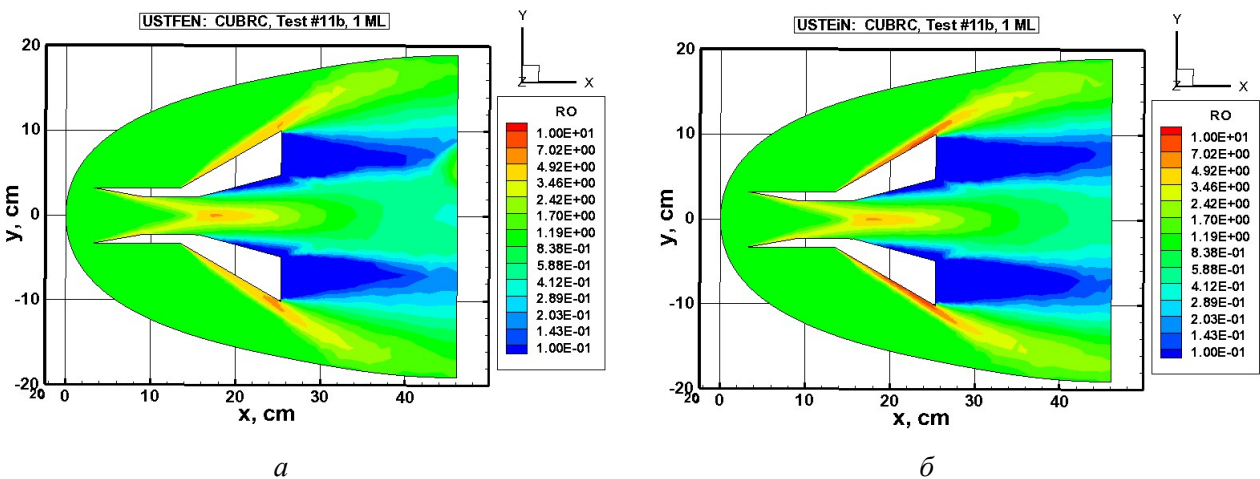


Рис. 44. Поля плотности, полученные с использованием уравнения сохранения полной (а) и внутренней удельной энергии (б)

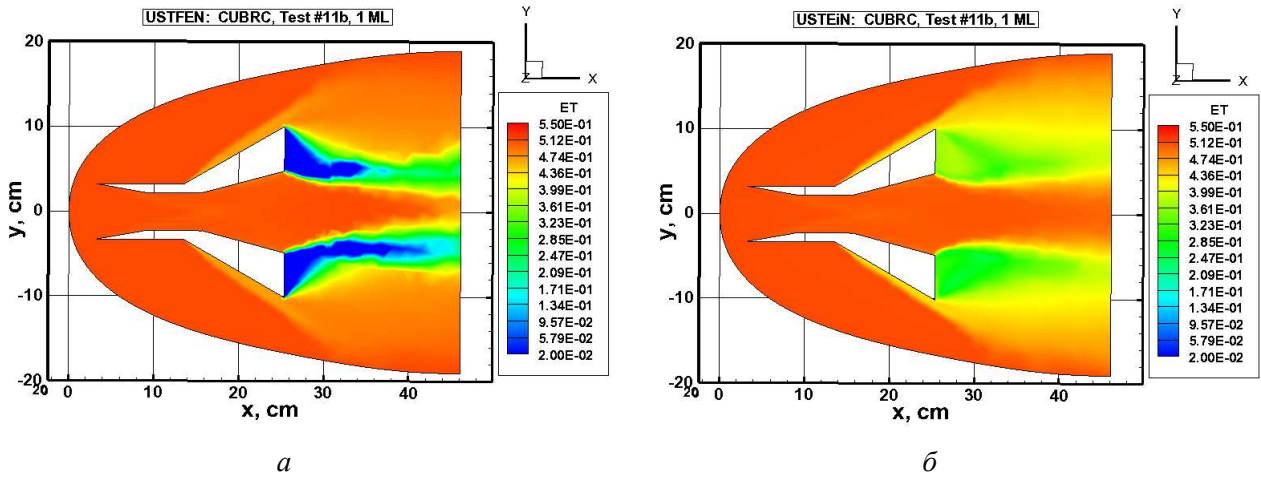


Рис. 45. Поля полной удельной энергии, полученные с использованием уравнения сохранения полной (а) и внутренней удельной энергии (б)

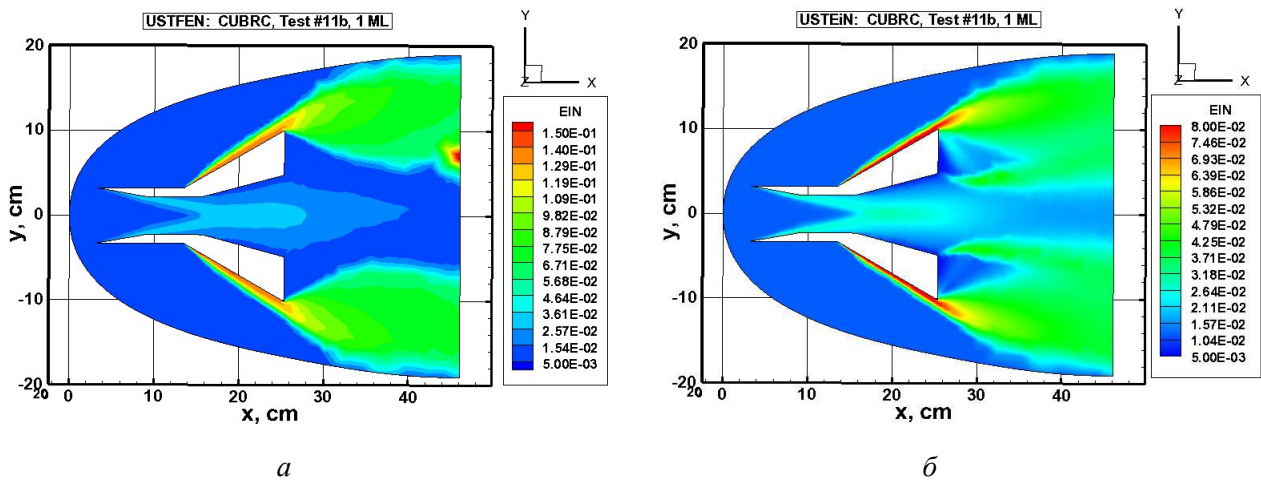


Рис. 46. Поля удельной внутренней энергии, полученные с использованием уравнения сохранения полной (а) и внутренней удельной энергии (б)

И, наконец, на рис. 47, 48 показаны распределения давления (рис. 47) и температуры (рис. 48) вблизи поверхности обтекаемой модели, где хорошо видны области экстремального силового и теплового воздействия на поверхность.

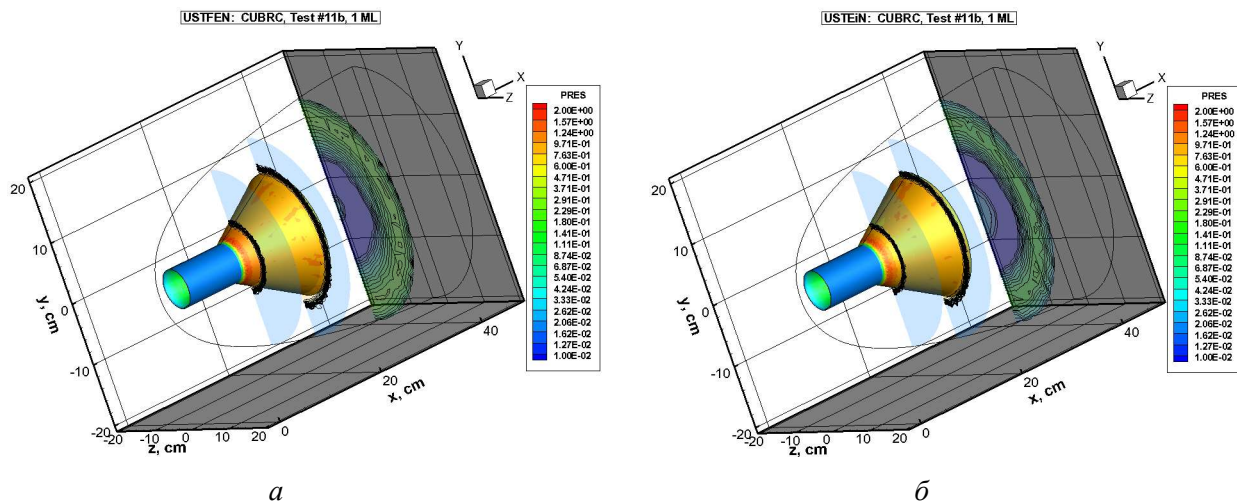


Рис. 47. Поля давления, полученные с использованием уравнения сохранения полной (а) и внутренней удельной энергии (б)

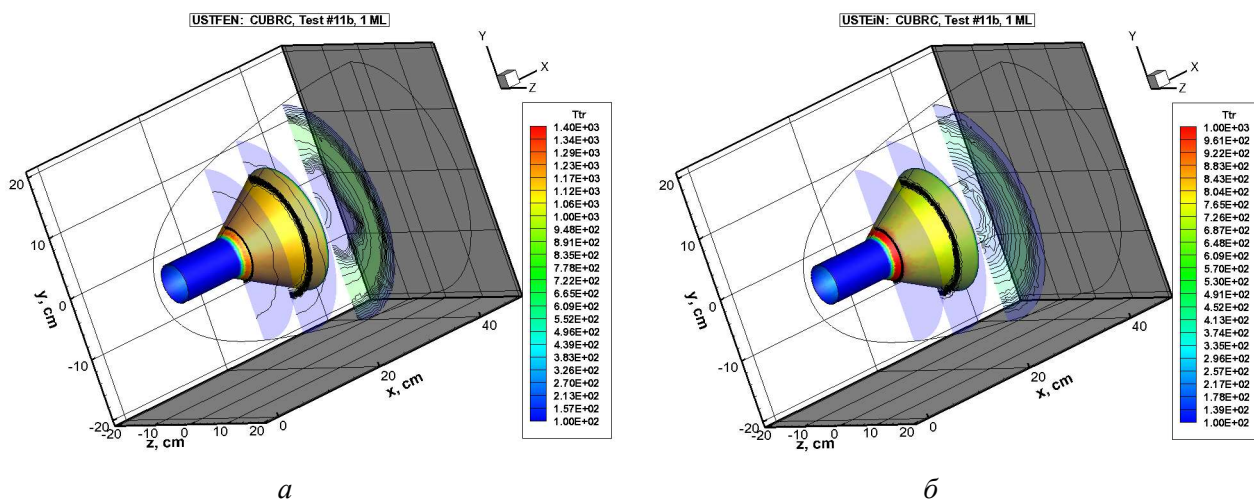


Рис. 48. Поля температуры, полученные с использованием уравнения сохранения полной (а) и внутренней удельной энергии (б)

## 8. Заключение

С использованием расчетной модели, реализующей конечно-объемный метод интегрирования системы уравнений Навье – Стокса на неструктурированных тетраэдральных сетках выполнено моделирование обтекания трех элементарных аэродинамических моделей (двойного острого и затупленного конуса, а также полого цилиндра с юбкой) для условий лабораторных экспериментов подробно документированных в статьях коллектива Исследовательского центра CUBRC под руководством проф. М. Холдена. Показано удовлетворительное совпадение расчетных и экспериментальных данных по распределению давления.

Выполнено расчетно-теоретическое исследование по использованию двух форм уравнения сохранения полной и внутренней удельной энергии. Показано хорошее описание экспериментальных данных по распределению давления при использовании обоих форм уравнения сохранения энергии.

Проведено численное исследование по влиянию на результат расчетов различных конфигураций тетраэдральных сеток малой размерности, которое показало допустимость использования грубых конечно-объемных сеток для предварительной оценки распределения коэффициента давления вдоль поверхности исследуемых моделей.

## Благодарности и ссылки на гранты

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-124012500440-9).

## Литература

1. Kussoy M. I., Horstman C. C. An Experimental Documentation of a Hypersonic Shock-Wave Turbulent Boundary Layer Interaction Flow – With and Without Separation // NASA TM X-62. 1975. 65 p.
2. Settles G., Dodson L. Hypersonic Shock/Boundary-Layer Interaction Database. AIAA Paper 91-1763. 1991. 11 p. <https://doi.org/10.2514/6.1991-1763>
3. Holden M., Moselle J., Sweet S.J., Martin S. A Database for Aerothermal Measurements in Hypersonic Flow for CFD Validation. AIAA Paper 96-4597. 1996. 63 p.
4. Holden M. S., Wadhams T. P., Harvey J. K., Candler G. V. Comparison between Measurements in Regions of Laminar Shock Wave Boundary Layer Interaction in Hypersonic Flows with Navier-Stokes and DSMC Solutions. RTO-TR-AVT-007-03. 2006. 56 p.

5. Chanetz B., Benay R., Bousquet J.-M., Bur R., Pot T., Grasso F., Moss J. Experimental and Numerical Study of the Laminar Separation in Hypersonic Flow // *Aerospace Science and Technology*. 1998. Vol. 2. No. 3. Pp. 205–218
6. Боровой В. Я., Егоров И. В., Мошаров В. Е., Скуратов А. С., Радченко В. Н. Экстремальный нагрев тел в гиперзвуковом потоке. Газодинамические явления и их характеристики. М.: Наука, 2018. 388 с.
7. Grasso F., Marini M. Analysis of Hypersonic Shock-Wave Laminar Boundary Layer Interaction Phenomena // *Computers and Fluids*. 1996. Vol. 25. No. 6. Pp. 561–581.
8. Moss J.N., Olejniczak J. Shock-Wave/Boundary-Layer Interactions in Hypersonic Low Density Flows. AIAA Paper 98-2668. 19 p.
9. Olejniczak J., Candler G. V., Hornung H. G. Computation of Double-Cone Experiments in High Enthalpy Nitrogen. AIAA Paper 97-2599. 1997. 11 p.
10. Wright M., Sinha K., Olejniczak J., Candler G., Magruder T., Smits A. Numerical and Experimental Investigation of Double-Cone Shock Interactions // *AIAA J*. 2000. Vol. 38. No. 12. Pp.2268–2276.
11. Gnoffo P. A. CFD Validation Studies for Hypersonic Flow Prediction. AIAA Paper 2001-1025. 2001. 13 p.
12. Candler G. V., Nompelis I., Druguet M.-C. Navier – Stokes Predictions of Hypersonic Double-Cone and Cylinder-Flare Flow Fields. AIAA Paper 2001-1024. 2001. 10 p.
13. Wang W.-L., Boyd I. D. Particle and Continuum Computations of Hypersonic Flow Over Sharp and Blunted Cones. AIAA Paper 2001-2900. 2001. 12 p.
14. Roy C., Bartel T., Gallis M., Payne J. DSMC and Navier – Stokes Predictions for Hypersonic Laminar Interacting Flows. AIAA Paper 2001-1030. 2001. 14 p.
15. Roy C. J., Gallis M. A., Bartel T. J., Payne J. L. Navier – Stokes and DSMC Simulations for Hypersonic Laminar Shock-Shock Interaction Flows. AIAA Paper 2002-0737. 2002.16 p.
16. Gaitonde D., Canupp P., Holden M. Heat Transfer Prediction in a Laminar Hypersonic Viscous/Inviscid Interaction // *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*. 2002. Vol. 16. No. 4. Pp. 481–489.
17. D'Ambrosio D. Numerical Prediction of Laminar Shock/Shock Interactions in Hypersonic Flow // *J. Spacecraft Rockets*. 2003. Vol. 40. No. 2. Pp.153–161.
18. Боровой В. Я., Егоров И. В., Скуратов А. С., Струминская И. В. Взаимодействие косого скачка уплотнения с пограничным и высокэнтропийными слоями плоской пластины // *Изв. РАН МЖГ*. 2005. № 6. С. 89–106.
19. Surzhikov S. T. Numerical Simulation of Shock-Wave Interaction with a Laminar Boundary Layer in a Hypersonic Flow around Models with a Kink in the Generatrix // *Fluid Dynamics*. 2022. Vol. 57. Suppl. 1. Pp. S97–S116.
20. Knight D., Longo J., Drikakis D., Gaitonde D., Lani A., Nompelis I., Reimann B., Walpot L. Assessment of CFD Capability for Prediction of Hypersonic Shock Interactions// *Prog. Aerospace Sci*. 2012. Vol. 48. P. 8–26.
21. Knight D., Van H., Panaras A., Zheltovodov A. RTO WG 10: CFD Validation for Shock Wave Turbulent Boundary Layer Interactions. AIAA Paper 2002-0437. 2002. 30 p.
22. Knight D. RTO WG 10: Test Cases for CFD Validation of Hypersonic Flight. AIAA Paper 2002-0433. 2002. 25 p.
23. Knight D., Chazot O., et al. Assessment of predictive capabilities for aerodynamic heating in hypersonic flow // *Progress Aerospace Sciences*. 2017. Vol. 60. Pp. 39–53.
24. Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М. Метод крупных частиц в газовой динамике. М., Наука, 1982. 392 с.
25. Годунов С. К. Разностный метод численного расчёта разрывных решений уравнений гидродинамики // *Матем. сб.* 1959. Т. 89. № 3. С. 271–306.
26. Liou M. A sequel to AUSM: AUSM+ // *Journal of Computational Physics*. 1996. Vol.129. Pp.364–382.

27. Zheleznyakova A. L., and Surzhikov S. T. Calculation of a hypersonic flow over bodies of complex configuration on unstructured tetrahedral meshes using the AUSM scheme // High Temp. 2014. Vol. 52. No. 2, pp. 271–281.
28. Волков К. Н., Емельянов В. Н. Вычислительные технологии в задачах механики жидкости и газа. М.: Физматлит. 2012. 468 с.
29. Самарский А. А. Введение в численные методы. М. Наука. 1982. 286 с.
30. Краснов Н. Ф. Аэродинамика. Ч.I. Основы теории. Аэродинамика профиля и крыла. (4-е изд.). М.: Издательство URSS. 2010. 496 с.
31. Anderson D., Tannehill J. C., Pletcher R. H., Munipalli R., & Shankar V. Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer (4th ed.). CRC Press. 2020. 792 p.
32. Суржигов С. Т. Численная интерпретация экспериментальных данных по аэродинамике модели НВ-2 с использованием компьютерных кодов USTFEN и PERAT-3D // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2020. Т.21, вып. 1. <http://chemphys.edu.ru/issues/2020-21-1/articles/900/>

## References

1. Kussoy M. I., Horstman C. C., An Experimental Documentation of a Hypersonic Shock-Wave Turbulent Boundary Layer Interaction Flow – With and Without Separation, NASA TM X-62, 1975, 65 p.
2. Settles G., Dodson L. Hypersonic Shock/Boundary-Layer Interaction Database, AIAA Paper 91-1763. 1991, 11 p. <https://doi.org/10.2514/6.1991-1763>
3. Holden M., Moselle J., Sweet S. J., Martin S., A Database for Aerothermal Measurements in Hypersonic Flow for CFD Validation, AIAA 96-4597, 1996, 63 p. DOI:10.2514/6.1992-4023
4. Holden M. S., Wadhams T. P., Harvey J. K., Candler G. V., Comparison between Measurements in Regions of Laminar Shock Wave Boundary Layer Interaction in Hypersonic Flows with Navier-Stokes and DSMC Solutions, RTO-TR-AVT-007-03, 2006, 56 p.
5. Chanetz B., Benay R., Bousquet J.-M., Bur R., Pot T., Grasso F., Moss J., Experimental and Numerical Study of the Laminar Separation in Hypersonic Flow, *Aerospace Science and Technology*, 1998, vol. 2, no. 3, pp. 205–218. [https://doi.org/10.1016/S1270-9638\(98\)80054-0](https://doi.org/10.1016/S1270-9638(98)80054-0)
6. Borovoy V. Ya., Egorov I. V., Mosharov V. E., Skuratov A. S., Radchenko V. N., *Extreme heating of bodies in a hypersonic flow. Gas-dynamic phenomena and their characteristics*, М.: Nauka, 2018, 388 p.
7. Grasso F., Marini M., Analysis of Hypersonic Shock-Wave Laminar Boundary Layer Interaction Phenomena, *Computers and Fluids*, 1996, vol. 25, no. 6, pp. 561–581. [https://doi.org/10.1016/0045-7930\(96\)00019-9](https://doi.org/10.1016/0045-7930(96)00019-9)
8. Moss J. N., Olejniczak J., Shock-Wave/Boundary-Layer Interactions in Hypersonic Low Density Flows, AIAA Paper 98-2668, 1998, 19 p. <https://doi.org/10.2514/6.1998-2668>
9. Olejniczak J., Candler G. V., Hornung H. G., Computation of Double-Cone Experiments in High Enthalpy Nitrogen, AIAA Paper 97-2599, 1997, 11 p.
10. Wright M., Sinha K., Olejniczak J., Candler G., Magruder T., Smits A., Numerical and Experimental Investigation of Double-Cone Shock Interactions, *AIAA J.*, 2000, vol. 38, no. 12, pp. 2268–2276. <https://doi.org/10.2514/2.918>
11. Gnoffo P. A., CFD Validation Studies for Hypersonic Flow Prediction, AIAA Paper 2001-1025, 2001, 13 p. <https://doi.org/10.2514/6.2001-1025>
12. Candler G. V., Nompelis I., Druguet M.-C., Navier–Stokes Predictions of Hypersonic Double-Cone and Cylinder-Flare Flow Fields, AIAA Paper 2001-1024, 2001, 10 p. <https://doi.org/10.2514/6.2001-1024>
13. Wang W.-L., Boyd I. D., Particle and Continuum Computations of Hypersonic Flow Over Sharp and Blunted Cones, AIAA Paper 2001-2900, 2001, 12 p. <https://doi.org/10.2514/6.2001-2900>
14. Roy C., Bartel T., Gallis M., Payne J., DSMC and Navier–Stokes Predictions for Hypersonic Laminar Interacting Flows, AIAA Paper 2001-1030, 2001, 14 p. <https://doi.org/10.2514/6.2001-1030>

15. Roy C. J., Gallis M. A., Bartel T. J., Payne J. L., Navier – Stokes and DSMC Simulations for Hypersonic Laminar Shock-Shock Interaction Flows, AIAA Paper 2002-0737, 2002, 16 p. DOI:10.2514/6.2002-737
16. Gaitonde D., Canupp P., Holden M., Heat Transfer Prediction in a Laminar Hypersonic Viscous/Inviscid Interaction, *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 2002, vol. 16, no. 4, pp. 481–489. <https://doi.org/10.2514/2.6714>
17. D'Ambrosio D., Numerical Prediction of Laminar Shock/Shock Interactions in Hypersonic Flow, *J. Spacecraft Rockets*, 2003, vol. 40, no. 2, pp. 153–161. <https://doi.org/10.2514/2.3947>
18. Borovoy V. Ya., Egorov I. V., Skuratov A. S., Struminskaya I. V., Interaction of an oblique shock wave with the boundary and high-entropy layers of a flat plate, *Izv. RAS MZhG*, 2005, no. 6, pp. 89–106 [in Russian].
19. Surzhikov S. T., Numerical Simulation of Shock-Wave Interaction with a Laminar Boundary Layer in a Hypersonic Flow around Models with a Kink in the Generatrix, *Fluid Dynamics*, 2022, vol. 57, suppl. 1, pp. S97–S116. DOI: 10.1134/S001546282260122X
20. Knight D., Longo J., Drikakis D., Gaitonde D., Lani A., Nompelis I., Reimann B., Walpot L., Assessment of CFD Capability for Prediction of Hypersonic Shock Interactions, *Prog. Aerospace Sci.*, 2012, vol. 48, pp. 8–26. <https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2011.10.001>
21. Knight D., Van H., Panaras A., Zheltovodov A., RTO WG 10: CFD Validation for Shock Wave Turbulent Boundary Layer Interactions, AIAA Paper 2002-0437, 2002, 30 p. <https://doi.org/10.2514/6.2002-437>
22. Knight D., RTO WG 10: Test Cases for CFD Validation of Hypersonic Flight, AIAA Paper 2002-0433, 2002, 25 p. <https://doi.org/10.2514/6.2002-433>
23. Knight D., Chazot O., et al., Assessment of predictive capabilities for aerodynamic heating in hypersonic flow, *Progress Aerospace Sciences*, 2017, vol. 60, pp. 39–53. DOI: 10.1016/j.paerosci.2017.02.001
24. Belotserkovsky O. M., Davydov Yu. M., *Method of large particles in gas dynamics*, M.: Nauka, 1982, 392 pp. [in Russian].
25. Godunov S. K., Difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of hydrodynamic equations, *Mat. sb.*, 1959, vol. 89, no. 3, pp. 271–306 [in Russian].
26. Liou M., A sequel to AUSM: AUSM+, *Journal of Computational Physics*, 1996, vol. 129, pp. 364–382. <https://doi.org/10.1006/jcph.1996.0256>
27. Zheleznyakova A. L., Surzhikov S. T., Calculation of a hypersonic flow over bodies of complex configuration on unstructured tetrahedral meshes using the AUSM scheme, *High Temp.*, 2014, vol. 52, no. 2, pp. 271–281. <https://doi.org/10.1134/S0018151X14020217>
28. Volkov K. N., Emelianov V. N., *Computational Technologies in Problems of Fluid and Gas Mechanics*, M.: Fizmatlit, 2012, 468 p. [in Russian].
29. Samarskii A. A., *Introduction to Numerical Methods*, M.: Nauka, 1982, 286 p.
30. Krasnov N. F., *Aerodynamics. Part I. Fundamentals of Theory. Aerodynamics of Airfoils and Wings*. (4th ed.), M.: URSS Publishing House, 2010, 496 p. [in Russian].
31. Anderson D., Tannehill J. C., Pletcher R. H., Munipalli R., & Shankar V., *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer* (4th ed.), CRC Press, 2020, 792 p.
32. Surzhikov S. T., Numerical Interpretation of Experimental Data on Aerodynamics of the HB-2 Model Using Computer Codes USTFEN and PERAT-3D, *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, 2020, vol. 21, issue 1 [in Russian]. <http://chemphys.edu.ru/issues/2020-21-1/articles/900/>

Статья поступила в редакцию 27 декабря 2025 г.